Table des matières

1 Calcul matriciel **3**
1.1 Définitions et propriétés 3
1.2 Opérations sur les matrices 4
1.2.1 Addition 4
1.2.2 Multiplication par un scalaire 5
1.2.3 Multiplication des matrices 5
1.3 Matrices élémentaires 7
1.3.1 Opérations élémentaires sur une matrice 7
1.3.2 Application pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée 8

2 Déterminants **10**
2.1 Déterminant d'ordre 2 10
2.2 Déterminant d'ordre 3 10
2.3 Déterminant d'ordre n 13
2.4 Applications 15
2.4.1 Calcul de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre n . . . 15
2.4.2 Résolution de systèmes linéaires (Méthode de Cramer) 16

3 Espaces Vectoriels **17**
3.1 Espaces vectoriels 17
3.2 Sous-Espaces vectoriels 18
3.3 Famille Génératrice 20
3.4 Dépendance et Indépendance Linéaires - Bases 21
3.5 Existence de Bases (en dimension finie) 23
3.6 Les Théorèmes Fondamentaux sur la Dimension 24

3.7 Somme, Somme directe, Sous-Espaces Supplémentaires 27

4 Les Applications Linéaires 31

4.1 Applications Linéaires 31
4.2 Image et Noyau 32
4.3 Matrices Associées aux Applications Linéaires 35
4.4 Matrice d'un Vecteur. Calcul de l'Image d'un Vecteur 38
4.5 Matrice de l'Inverse d'une Application 40
4.6 Changement de Bases 40
4.7 Rang d'une Matrice 42
4.8 Matrices Remarquables 43
4.9 Application des Déterminants à la Théorie du Rang 45
4.9.1 Caractérisation des Bases 45
4.9.2 Comment reconnaître si une famille de vecteurs est libre 46
4.9.3 Comment reconnaître si un vecteur appartient à l'espace engendré par d'autres vecteurs 47
4.9.4 Détermination du rang 48

5 Valeurs Propres et Vecteurs Propres 50

5.1 Valeurs Propres et vecteurs propres 50
5.2 Propriétés des vecteurs propres et valeurs propres 52
5.3 Propriétés du polynôme caractéristique 53
5.4 Diagonalisation 55

Chapitre 1

Calcul matriciel

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Définitions et propriétés

Un tableau rectangulaire, de nombres ($\in \mathbf{K}$), de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

est appelé matrice. Les nombres a_{ij} sont appelés coefficients de la matrice. Les lignes horizontales sont appelées rangées ou vecteurs rangées, et les lignes verticales sont appelées colonnes ou vecteurs colonnes de la matrice. Une matrice à m rangées et n colonnes est appelée matrice de type (m, n). On note la matrice (1.1) par (a_{ij}).

Exemple 1.1.1. *:*

1) La matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ *a tous ses coefficients nuls.*

2) Une matrice $(a_1, ..., a_n)$ *ayant une seule rangée est appelée matrice uniligne.*

3) Une matrice $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ *ayant une seule colonne est appelée matrice uni-colonne.*

1) Une matrice ayant le même nombre de rangées et de colonnes est appelées matrice carrée, et le nombre de rangées est appelé son ordre.

2) La matrice carrée (a_{ij}) telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 1$ $\forall i$ est appelée matrice unité, notée par I, elle vérifie $AI = IA = A$, $\forall A$ matrice carrée du même ordre que I.

3) Deux matrices (a_{ij}) et (b_{ij}) sont égales si et seulement si elles ont même nombre de rangées et le même nombre de colonnes et les éléments correspondants sont égaux ; c'est à dire $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i, j$.

1.2 Opérations sur les matrices

1.2.1 Addition

La somme de deux matrices de type (m, n) (a_{ij}) et (b_{ij}) est la matrice (c_{ij}) de type (m, n) ayant pour éléments $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour $i = 1, ..., m$ et $j = 1, ..., n$.

Exemple 1.2.1. *: Si* $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*, alors* $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

L'addition des matrices satisfait les propriétés suivantes :

Pour A, B et C des matrices de type (m, n) on a :

1) $A + B = B + A$

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

3) $A + O = O + A = A$ où O est la matrice nulle

4) $A + (-A) = O$ où $-A = (-a_{ij})$.

1.2.2 Multiplication par un scalaire

Soit $A = (a_{ij})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = (\lambda a_{ij}).$$

Exemple 1.2.2. *:*

Si $A = (2\ 7\ 8)$, *alors* $3A = (6\ 21\ 24)$

Cette multiplication vérifie :

Pour A, B des matrices de type (m, n)

1) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

3) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

4) $1A = A$

1.2.3 Multiplication des matrices

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type (m, n) et $B = (b_{kl})$ une matrice de type (r, p), alors le produit AB (dans cet ordre) n'est défini que si $n = r$, et est la matrice $C = (c_{il})$ de type (m, p) dont les éléments $c_{il} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}b_{jl}$.

Exemple 1.2.3. *:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3(1) + 2(5) + (-1)(6) & 3(0) + 2(3) + (-1)(4) & 3(2) + 2(1) + (-1)(2) \\ 0(1) + 4(5) + 6(6) & 0(0) + 4(3) + 6(4) & 0(2) + 4(1) + 6(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 56 & 36 & 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le produit matriciel vérifie les propriétés suivantes :

1) $\lambda(AB) = (\lambda A)B$, $\lambda \in \mathbf{K}$

2) $A(BC) = (AB)C$

3) $(A + B)C = AC + BC$

4) $C(A+B) = CA + CB$

Pour vu que les produits qui figurent dans les expressions soient définis.

Remarque 1.2.1. *:*

1) La multiplication matricielle n'est pas en général commutative, c.à.d $AB \neq BA$.

2) La simplification n'est pas vraie en général, c.à.d $AB = O$ *n'entraîne pas, nécessairement* $A = O$ *ou* $B = O$.

3) Une matrice carrée A *est inversible s'il existe* B *telle que* $AB = BA = I$.

Exemple 1.2.4. *:*

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *alors* $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq O$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq O$ *et pourtant* $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

1) Une matrice du type $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0\dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ c'est à dire $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ est appelée matrice diagonale.

2) Une matrice du type $\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ est appelée matrice triangulaire.

La première vérifie $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ et la seconde $a_{ij} = 0$ pour $i < j$.

3) Au lieu de AA on écrit tout simplement A^2, de même $A^3 = A^2A$ ....

4) Si les lignes et les colonnes d'une matrice sont échangées, la matrice obtenue est appelée transposée de la matrice d'origine ; la transposée de A est notée ${}^tA$.

5) Si $A = (a_{ij})$, alors ${}^tA = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = a_{ji}$, on a ${}^t({}^tA) = A$.

Exemple 1.2.5. *:*

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *; alors* ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

1.3 Matrices élémentaires

1.3.1 Opérations élémentaires sur une matrice

Soit A une matrice, on appelle opération élémentaire sur A l'une des transformations suivantes :

1) Ajouter à une ligne (resp à une colonne) de A une autre ligne (resp colonne) multipliée par un scalaire. $(R_j \longleftarrow R_j + kR_i)$

2) Multiplier une ligne (resp une colonne) de A par un scalaire non nul. $(R_i \longleftarrow kR_i)$

3) Permuter les lignes (resp les colonnes) de A. $(R_i \longleftrightarrow R_j)$

Soit e une opération élémentaire sur les lignes et $e(A)$ désigne les résultats obtenus après l'application de l'opération e sur une matrice A.

Soit E la matrice obtenue après l'application de e sur la matrice unité I, c'est à dire $E = e(I)$. E est alors appelée la matrice élémentaire correspondant à l'opération élémentaire e.

Exemple 1.3.1. *:*

Considérons la matrice unité d'ordre 3.

1) Permuter les lignes L_2 *et* L_3.

2) Remplacer ligne L_2 *par* $-6L_2$.

3) Remplacer ligne L_3 *par* $-4L_1 + L_3$.

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *sont les*

matrices élémentaires correspondantes.

Théorème 1.3.1. *:*

Soit e une opération élémentaire sur les lignes et E la matrice élémentaire correspondante d'ordre m, alors $e(A) = EA$ pour toute matrice A de type (m, n).

Les opérations élémentaires ont des opérations inverses du même type

1) Permuter R_i et R_j est son propre inverse.

2) Remplacer R_i par kR_i et remplacer R_i par $\frac{1}{k}R_i$ sont inverses

3) Remplacer R_j par kR_i+R_j et remplacer R_j par $-kR_i+R_j$ sont inverses.

Supposons que e' est l'inverse d'une opération élémentaire sur les lignes e, et soit E' et E les matrices correspondantes. Alors E est inversible et son inverse est E'. En particulier un produit de matrices élémentaires est inversible.

Théorème 1.3.2. *:*

Soit A une matrice carrée, alors A est inversible si et seulement si A est un produit de matrices élémentaires.

1.3.2 Application pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée

Exemple 1.3.2. *:*

Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ *si elle existe.*

Pour ce faire nous écrivons la matrice unité à la droite de A et nous appliquons les mêmes opérations à cette matrice que celles effectuées sur A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3-4L_1]{L_2-2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3+L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2-L_3]{L_1+2L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{-L_3}{\xrightarrow{-L_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

d'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Ecrivons cette inverse sous forme de produit de matrices élémentaires :

$A^{-1} = BC$ *avec* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chapitre 2

Déterminants

2.1 Déterminant d'ordre 2

Le symbole $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ est appelé déterminant d'ordre 2 de la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et est défini par $detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Exemple 2.1.1. *:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

On constate alors que :

1) Si deux rangées (ou deux colonnes) d'un déterminant sont permutées la valeur d'un déterminant est multipliée par -1.

2) Si on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On constate que $detA = det^tA$, d'où la valeur d'un déterminant est conservée lorsque l'on échange les colonnes et les lignes (dans le même ordre).

2.2 Déterminant d'ordre 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, on définit

$$\begin{aligned} detA &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\text{mineur de } a_{11}} - a_{21} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\text{mineur de } a_{21}} + a_{31} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}_{\text{mineur de } a_{31}} \end{aligned}$$

Exemple 2.2.1. *:*

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 - 12 = -12$$

Le cofacteur de l'élément de $detA$ de la $i^{ème}$ ligne et la $k^{ème}$ colonne est égal à $(-1)^{i+k}$ fois le mineur de cet élément (c. à .d le déterminant d'ordre 2 obtenu en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $k^{ème}$ colonne).

Remarque 2.2.1. *:*

Le cofacteur de a_{22} *est* $(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Les signes $(-1)^{i+j}$ *forment la table suivante* $\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$.

On remarque que l'on peut écrire (1) *sous la forme :*

$detA = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$ *où* C_{i1} *est le cofacteur de* a_{i1} *dans* $detA$.

3) Le déterminant de A, $detA$, peut être developpé suivant n'importe quelle ligne ou colonne, c'est à dire, qu'il peut être écrit sous la forme d'une somme de trois éléments de n'importe quelle ligne (ou colonne), chacun multiplié par son cofacteur.

Exemple 2.2.2. *:*

$$detA = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

4) Si tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) d'un déterminant sont multipliés par une constante k, la valeur du nouveau déterminant est k

fois la valeur du déterminant initial. Cette propriété peut être utilisée pour simplifier un déterminant.

Exemple 2.2.3. *:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2(1) & 2(3) & 2(2) \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3(1) & 0 \\ 1 & 3(1) & 2 \\ -1 & 3(0) & 2 \end{vmatrix} =$$

$$6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

5) Si tous les éléments d'une ligne (ou colonne) d'un déterminant sont nuls, la valeur du déterminant est nulle.

6) Si chaque élément d'une ligne (ou colonne) d'un déterminant est exprimé sous la forme d'un binôme, le déterminant peut être écrit comme somme de deux déterminants.

Exemple 2.2.4. *:*

$$\begin{vmatrix} a_1 + d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

7) Si deux lignes (ou colonnes) d'un déterminant sont proportionnelles, la valeur du déterminant est nulle.

Exemple 2.2.5. *:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

8) La valeur d'un déterminant est conservée si l'on ajoute à une ligne (ou à une colonne) une combinaison des autres lignes (ou colonnes).

Exemple 2.2.6. *:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\xrightarrow{C_1+C_3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$\xrightarrow{C_1+C_3}$ signifie que l'on a ajouté la colonne C_3 à la colonne C_1.

Cette dernière propriété permet de simplifier énormément les calculs, elle permet de réduire le calcul d'un déterminant d'ordre 3 au calcul d'un seul déterminant d'ordre 2.

Exemple 2.2.7. *:*

$$\text{Calculer} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \overset{\xrightarrow{C_1+C_2-C_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 5(-4+4) = 0$$

Remarque 2.2.2. *:*

La ligne (ou colonne) dans laquelle seront effectués les calculs ne doit pas être multipliée par des scalaires. La multiplication par un scalaire λ reviendrait à multiplier le déterminant par λ.

Exemple 2.2.8. *:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{2L_1-L_2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \textit{ alors que } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

2.3 Déterminant d'ordre n

Le symbole $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ est appelé déterminant d'ordre n.

Pour $n = 1$, ça signifie a_{11}.

Pour $n \geq 2$, ça signifie la somme des produits des éléments de n'importe quelle ligne ou colonne par leurs cofacteurs respectifs c'est à dire

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} \quad (\ i = 1, 2 \ldots, \text{ ou } n\ )$$

$$\text{ou} \quad = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \ldots + a_{nk}C_{nk} \quad (\ k = 1, 2 \ldots, \text{ ou } n\ )$$

Le déterminant d'ordre n est alors défini en fonction de n déterminants d'ordre $(n-1)$, chacun est à son tour, défini en fonction de $(n-1)$ déterminants d'ordre $(n-2)$ et ainsi de suite, finalement on aboutit aux déterminants d'ordre 2.

Remarque 2.3.1. *:*

Les propriétés 1) jusqu'à 8) restent valables pour un déterminant d'ordre n.

Pour calculer la valeur d'un déterminant, on développera suivant la ligne ou colonne où il y a le plus de zéros.

Exemple 2.3.1. *:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2+C_3+C_4}{\overrightarrow{=}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_1+L_2}{\overrightarrow{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Remarque 2.3.2. *:*

1) $det(A+B) \neq detA + detB$ en général.

2) $det(AB) = (detA)(detB)$

3) $det(A^{-1}) = (detA)^{-1}$ où A^{-1} désigne l'inverse de A.

2.4 Applications

2.4.1 Calcul de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre n

On rappelle qu'une matrice carrée d'ordre n A est inversible s'il existe B d'ordre n telle que $AB = BA = I$ où I est la matrice unité d'ordre n, c'est à dire la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

Critère : A est inversible si $detA \neq 0$.

Une fois assuré que A est inversible, on calcule son inverse à l'aide de la formule suivante : $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{detA}(adjA)}$ où $(adjA)$ désigne l'adjoint classique de A c'est à dire la matrice ${}^t[C_{ij}]$ où C_{ij} désigne la matrice des cofacteurs de A.

Exemple 2.4.1. *:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{L_1 - 2L_3}{\xrightarrow{=}} \begin{vmatrix} 0 & 5 & -14 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -14 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -46 \neq 0,$$

donc A est inversible.

Déterminons les 9 cofacteurs de A

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

2.4.2 Résolution de systèmes linéaires (Méthode de Cramer)

Un système d'équations, $AX = b$, où A est une matrice carrée d'ordre n, peut être résolu à l'aide des déterminants, lorsque $detA \neq 0$.

Si on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, alors $x_i = \frac{1}{detA}[C_{1i}b_1 + C_{2i}b_2 + \ldots + C_{ni}b_n] = \frac{1}{detA}detB_i$ où B_i est la matrice obtenue en remplaçant la $i^{ème}$ colonne de A par b.

Exemple 2.4.2. *:*

Utiliser la méthode de Cramer pour résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[=]{L_2+L_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

$$x_1 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -7 & 0 & -6 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}[-(-12+21)] = -3.$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \frac{-5}{3}.$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{5}{3}.$$

Remarque 2.4.1. *:*

La méthode de Gauss pour les systèmes et celle des matrices élémentaires pour le calcul de l'inverse demeurent les plus efficaces.

Chapitre 3

Espaces Vectoriels

Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désignera $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

3.1 Espaces vectoriels

Définition 3.1.1. *: On appelle espace vectoriel sur $\boldsymbol{K}$ (ou $\boldsymbol{K}$-espace vectoriel) un ensemble non vide$\boldsymbol{E}$ muni d'une loi notée $+$ et d'une autre loi notée ., noté ($\mathbf{E}, +, .$), telles que :*

1) Pour tout $x, y \in \mathbf{E}$, $x + y \in \mathbf{E}$.

2) Pour tout $x, y \in \mathbf{E}$, $x + y = y + x$.

3) Pour tout $x \in \mathbf{E}$, $x + 0_{\mathbf{E}} = x$.

4) Pour tout $x \in \mathbf{E}$, $-x \in \mathbf{E}$.

5) Pour tout $x, y, z \in \mathbf{E}$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.

6) Pour tout $\lambda \in\in \mathbf{K}$, $x \in \mathbf{E}$, $\lambda x \in \mathbf{E}$.

7) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x \ \forall\lambda, \mu \in \boldsymbol{K}$ et $\forall x \in \boldsymbol{E}$.

8) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x \ \forall\lambda, \mu \in \boldsymbol{K}$ et $\forall x \in \boldsymbol{E}$.

9) $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y \ \forall\lambda \in \boldsymbol{K}$ et $\forall x, y \in \boldsymbol{E}$.

10) $1.x = x \ \forall x \in \boldsymbol{E}$.

Les éléments de $\mathbf{K}$ sont dits scalaires et ceux de $\mathbf{E}$ vecteurs.

Exemple 3.1.1. *:*

1) $\boldsymbol{K}$ est un espace vectoriel sur lui même.

2) $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3) $\mathbb{R}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

4) $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni des lois :

$(a_0+a_1X+...+a_nX^n)+(b_0+b_1X+...+b_nX^n) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+ ... + (a_n+b_n)X^n$ *et* $\lambda(a_0+a_1X+...+a_nX^n) = \lambda a_0+\lambda a_1X+...+\lambda a_nX^n$.

5) Soit $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel sur* $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{A}$ *un ensemble quelconque non vide, et*

$\mathcal{S} = \{$ *applications* $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{E}\}$. *On peut définir sur* $\mathcal{S}$ *une structure d'espace vectoriel sur* $\boldsymbol{K}$ *par les lois :*

Si $f, g \in \mathcal{S}$ *et* $\lambda \in \boldsymbol{K}$, *alors*

$$\begin{array}{cc} f+g : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{E} & \lambda f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{E} \\ a \mapsto f(a)+g(a) & a \mapsto \lambda f(a) \end{array}$$

6) Soient $\boldsymbol{E}_1$ *et* $\boldsymbol{E}_2$ *deux espaces vectoriels sur* $\boldsymbol{K}$. *On définit une structure d'espace vectoriel sur* $\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_2$ *par :*

$(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ *et* $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$ *avec* $\lambda \in \boldsymbol{K}$.

D'une manière analogue, $\boldsymbol{E}_1 \times ... \times \boldsymbol{E}_n$ *est un espace vectoriel sur* $\boldsymbol{K}$ *si* $\boldsymbol{E}_1, ..., \boldsymbol{E}_n$ *le sont.*

Proposition 3.1.1. *: Pour tout* $\lambda \in \boldsymbol{K}$ *et pour tout* $x \in \boldsymbol{E}$, *on a :*

1) $\lambda.0 = 0$ *et* $0.x = 0$.

2) $\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ *ou* $x = 0$.

3) $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -\lambda x$.

Preuve : 1) $\lambda(0+0) = \lambda 0+\lambda 0 = \lambda 0 \Rightarrow \lambda 0 = 0$ et $(0+0)x = 0x+0x = 0x \Rightarrow 0x = 0$.

2) $\lambda x = 0$, si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda^{-1}\lambda x = 0 \Rightarrow x = 0$.

3) $(\lambda+(-\lambda))x = \lambda x+(-\lambda)x = 0 \Rightarrow (-\lambda x) = -(\lambda x)$.

Dans la suite $(-\lambda)x$ sera noté $-\lambda x$ et $x+(-y)$ sera noté $x-y$.

3.2 Sous-Espaces vectoriels

Définition 3.2.1. *: Soit* $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel et* $\boldsymbol{F}$ *une partie non vide de* $\boldsymbol{E}$. *On dit que* $\boldsymbol{F}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$, *si la restriction des lois de* $\boldsymbol{E}$ *à* $\boldsymbol{F}$ *fait de* $\boldsymbol{F}$ *un espace vectoriel.*

Proposition 3.2.1. *: Soit* $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel et* $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}$. *Alors* $\boldsymbol{F}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$ *si et seulement si :*

1) $\boldsymbol{F} \neq \emptyset$.

2) a) $x, y \in \boldsymbol{F} \Rightarrow x + y \in \boldsymbol{F}$.

b) $x \in \boldsymbol{F}$, $\lambda \in \boldsymbol{K} \Rightarrow \lambda x \in \boldsymbol{F}$.

Preuve : $\Rightarrow$) trivial.

$\Leftarrow$) $\lambda = -1$ et $y \in \mathbf{F} \Rightarrow -y \in \mathbf{F}$ d'après b) ; $x \in \mathbf{F} \Rightarrow x - y \in \mathbf{F}$ d'après a) ; d'où $\mathbf{F}$ est un sous-groupe de $\mathbf{E}$.

Les autres axiomes sont vérifiés pour tous les éléments de $\mathbf{E}$ et donc à fortiori pour les éléments de $\mathbf{F}$.

Proposition 3.2.2. *équivalente : $\boldsymbol{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$ si et seulement si :*

1) $\boldsymbol{F} \neq \emptyset$.

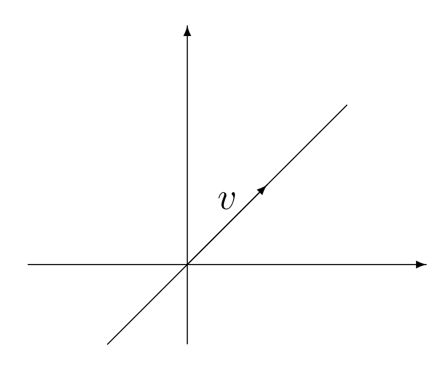
2) $x, y \in \boldsymbol{F}$; $\mu, \lambda \in K \Rightarrow \lambda x + \mu y \in \boldsymbol{F}$.

Preuve : Exercice.

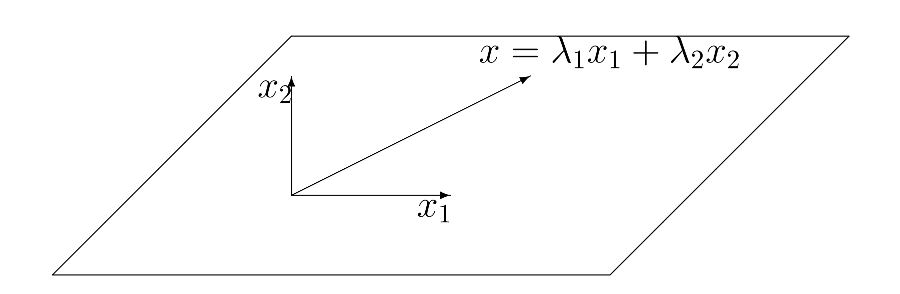
Exemple 3.2.1. *:*

1) Droite vectorielle :

Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel et soit $v \in \boldsymbol{E}$; $v \neq 0$, alors $\boldsymbol{F} = \{y \in \boldsymbol{E} / \exists \lambda \in \boldsymbol{K}; y = \lambda v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$ dit droite vectorielle engendrée par v.



2) Soient x_1, $x_2 \in \boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F} = \{y \in \boldsymbol{E} / \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{K}; y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\}$, $\boldsymbol{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$ dit plan vectoriel engendré par x_1 et x_2.



3) $\mathbb{R}_n[X] = \{$ *polynômes* $P \in \mathbb{R}[X]; degP \leq n\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[X]$.

4) Soit $\boldsymbol{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y + 3z = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.2.3. *: Soient* $\boldsymbol{F}$ *et* $\boldsymbol{G}$ *deus sous-espaces vectoriels de* $\boldsymbol{E}$.

1) $\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$.

2) $\boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{G}$ *n'est pas en général un sous-espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$.

3) Le complément $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{F})$ *d'un sous-espace vectoriel* $\boldsymbol{F}$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$.

Preuve : 1) $\mathbf{F} \cap \mathbf{G} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathbf{F} \cap \mathbf{G}$.

$x, y \in \mathbf{F} \cap \mathbf{G}$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K} \Rightarrow (x, y \in \mathbf{F},\ \lambda, \mu \in \mathbf{K})$ et $(x, y \in \mathbf{G},\ \lambda, \mu \in \mathbf{K}) \Rightarrow \lambda x + \mu y \in \mathbf{F} \cap \mathbf{G}$.

2) On prend $\mathbf{F} \not\subset \mathbf{G}$ et $\mathbf{G} \not\subset \mathbf{F}$, il existe donc $x \in \mathbf{F}$; $x \notin \mathbf{G}$ et $y \in \mathbf{G}$; $y \notin \mathbf{F}$; on a donc $x, y \in \mathbf{F} \cup \mathbf{G}$.

Si $\mathbf{F} \cup \mathbf{G}$ est un sous-espace vectoriel alors $x + y \in \mathbf{F} \cup \mathbf{G}$; c.à.d $x + y \in \mathbf{F}$ ou $x + y \in \mathbf{G}$.

Si $x + y \in \mathbf{F}$, alors $(x + y) - x \in \mathbf{F} \Rightarrow y \in \mathbf{F}$; contradiction.

Si $x + y \in \mathbf{G}$, alors $(x + y) - y \in \mathbf{G} \Rightarrow x \in \mathbf{G}$; contradiction.

3) Le complément $(\mathbf{E} - \mathbf{F})$ ne contient pas 0, donc n'est pas un sous-espace vectoriel.

3.3 Famille Génératrice

Définition 3.3.1. *: Une famille de vecteurs* $\{v_1, ...v_p\}$ *d'un espace vectoriel* $\boldsymbol{E}$ *est dite génératrice si :* $\forall x \in \boldsymbol{E}$, $\exists \lambda_1, ..., \lambda_p \in \boldsymbol{K}$ *tel que* $x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p$, *on dit que tout* $x \in \boldsymbol{E}$ *est combinaison linéaire des vecteurs* v_i.

Remarque 3.3.1. *: Une telle famille (finie) n'existe pas toujours. Considérons* $\mathbb{R}[X]$ *et* $\{P_1, ..., P_p\}$ *une famille finie de polynômes, elle ne peut pas être génératrice, car par combinaisons linéaires, on n'obtiendra que des polynômes de degré*$\leq$*Sup(deg* P_i*).*

Par contre pour $\mathbb{R}_n[X]$, *la famille* $\{1, X, ..., X^n\}$ *est une famille génératrice.*

Exemple 3.3.1. *:*

1) Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(1,0);(0,1)\}$ *est une famille génératrice.*

2) Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(1,0);(0,1);(1,2)\}$ *est une famille génératrice.*

3) Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(1,1);(1,-1)\}$ *est une famille génératrice.*

4) Dans $\mathbb{R}^n$, $\{(1,0,...,0);...;(0,...,0,1)\}$ *est une famille génératrice.*

Définition 3.3.2. *: Un espace vectoriel est dit de dimension finie, s'il existe une famille génératrice finie, dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie.*

Exemple 3.3.2. *:*

1) $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}_n[X]$ *sont de dimension finie.*

2) $\mathbb{R}[X]$ *est de dimension infinie.*

3) L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1,...,v_p$ *noté* $\overline{\{v_1,...,v_p\}}$ *ou* $\langle v_1,...,v_p\rangle$ *est un sous-espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$ *de dimension finie.*

3.4 Dépendance et Indépendance Linéaires - Bases

Définition 3.4.1. *: Soit* $v_1,...,v_p$ *une famille finie d'éléments de* $\boldsymbol{E}$. *On dit qu'elle est libre si :* $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_p = 0$.

On dit aussi que les vecteurs $v_1,...,v_p$ *sont linéairement indépendants.*

Une famille qui n'est pas libre, est dite liée (on dit aussi que ses vecteurs sont liés ou linéairement dépendants).

Exemple 3.4.1. *:*

1) Dans $\mathbb{R}^3$, *les vecteurs* $v_1 = (1,2,1)$ *;* $v_2 = (-1,3,1)$ *et* $v_3 = (-1,13,5)$ *sont liés car* $2v_1 + 3v_2 - v_3 = 0$.

2) Dans $\mathbb{R}^3$, *les vecteurs* $v_1 = (1,1,-1)$ *;* $v_2 = (0,2,1)$ *et* $v_3 = (0,0,5)$ *sont linéairement indépendants.*

Proposition 3.4.1. *: Une famille* $\{v_1,...,v_p\}$ *est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs* v_i *s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.*

Preuve : $\Rightarrow$) $\exists \lambda_1,...,\lambda_p$ non tous nuls tels que $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p = 0$, si $\lambda_i \neq 0$, alors
$v_i = \frac{-\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + ... + \frac{-\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} + \frac{-\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} ... + \frac{-\lambda_p}{\lambda_i} v_p$

$\Leftarrow)$ $\exists v_i$ tel que $v_i = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{i-1}v_{i-1} + \alpha_{i+1}v_{i+1} + ... + \alpha_p v_p$
c.à.d $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{i-1}v_{i-1} - v_i + \alpha_{i+1}v_{i+1} + ... + \alpha_p v_p = 0$.

Proposition 3.4.2. *: Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une famille libre et x un vecteur quelconque de l'espace engendré par les v_i (c.à.d x est combinaison linéaire des v_i), alors la décomposition de x sur les v_i est unique.*

Preuve : $x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_p v_p = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p \Rightarrow (\alpha_1 - \lambda_1)v_1 + ... + (\alpha_p - \lambda_p)v_p = 0 \Rightarrow \lambda_i = \alpha_i \ \forall i = 1, ..., p$.

Définition 3.4.2. *: On appelle base une famille à la fois libre et génératrice.*

Proposition 3.4.3. *: Soit $\{v_1, ..., v_n\}$ une base de $\boldsymbol{E}$. Tout $x \in \boldsymbol{E}$ se décompose d'une façon unique sur les v_i, c.à.d $\forall x \in \boldsymbol{E}\ \exists!(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \boldsymbol{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.*

Preuve : Proposition précédente.

Proposition 3.4.4. *: Soit $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ une base de $\boldsymbol{E}$. Il existe alors une bijection :*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{\mathcal{B}} : \boldsymbol{E} & \longrightarrow & \boldsymbol{K}^n \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i & \longmapsto & (x_1, ..., x_n) \end{array}$$

Les scalaires x_i sont dits composantes de x dans la base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$.

Exemple 3.4.2. *:*

1) Base canonique de $\boldsymbol{K}^n$, $\{e_k = (0, ..., \overset{k^{\text{ème}}\text{rang}}{\overset{\uparrow}{1}}, 0...0)/k = 1, ..., n\}$.

2) Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, $\{1, X, ..., X^n\}$.

3) Soit $\boldsymbol{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y + 3z = 0\}$. $\boldsymbol{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On a $v = (x, y, z) \in \boldsymbol{F} \Leftrightarrow y = -2x - 3z$ donc $v \in \boldsymbol{F} \Leftrightarrow v = (x, -2x - 3z, z) = x(1, -2, 0) + z(0, -3, 1)$, donc $(1, -2, 0)$ et $(0, -3, 1)$ engendrent $\boldsymbol{F}$. On vérifie qu'ils forment une famille libre, donc c'est une base de $\boldsymbol{F}$.

Proposition 3.4.5. *: 1) $\{x\}$ est une famille libre $\Leftrightarrow x \neq 0$.*

2) Toute famille contenant une famille génératrice est une famille génératrice.

3) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

4) Toute famille contenant une famille liée est liée.

5) Toute famille $\{v_1, ..., v_n\}$ dont l'un des vecteur v_i est nul, est liée.

Preuve : 1) $\Rightarrow$) Si $x = 0$ alors $\lambda x = 0$ pour tout λ d'où $\{x\}$ est liée.

$\Leftarrow$) $\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ car $x \neq 0$.

2) Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une famille génératrice et $\{v_1, ..., v_p, w_1, ..., w_q\}$ une sur-famille. Alors $\forall x \in \mathbf{E}$, $x = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i v_i + 0w_1 + ... + 0w_q$.

3) Soit $\mathcal{F} = \{v_1, ..., v_p\}$ une famille libre et $\mathcal{F}'$ une sous-famille de $\mathcal{F}$, quitte à changer la numérotation $\mathcal{F}' = \{v_1, ..., v_k\}$ avec $k \leq p$.

Si $\mathcal{F}'$ est liée, l'un des v_i serait combinaison linéaire des autres.

4) Soit $\mathcal{F} = \{v_1, ..., v_p\}$ et $\mathcal{G} = \{v_1, ..., v_p, w_1, ..., w_q\}$, l'un des vecteurs v_i est combinaison linéaires des autres vecteurs de $\mathcal{F}$, d'où de $\mathcal{G}$, d'où $\mathcal{G}$ est liée.

5) $\{0\}$ étant liée, toute sur-famille est liée.

3.5 Existence de Bases (en dimension finie)

Théorème 3.5.1. *: Dans un espace vectoriel $\boldsymbol{E} \neq \{0\}$ de dimension finie, il existe toujours des bases.*

Preuve : Soit $\mathcal{G} = \{v_1, ..., v_p\}$ une famille génératrice. Pour tout $x \in \mathbf{E}$, il existe $\alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbf{K}$ tels que $x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_p v_p$.

a) Si tous les v_i étaient nuls $\mathbf{E} = \{0\}$ ce qui est exclu. Quitte à changer de numérotation on peut supposer $v_1 \neq 0$.

b) $\mathbf{L}_1 = \{v_1\}$ est une famille libre, si elle était génératrice, stop.

c) Supposons $\mathbf{L}_1$ non génératrice. Montrons qu'il existe $v_* \in \{v_2, ..., v_p\}$ tel que $\{v_1, v_*\}$ soit libre.

Supposons le contraire ; c.à.d v_1 est lié à chacun des v_i, $i = 2, ..., p$, d'où $\exists \lambda_2, ..., \lambda_p$; $v_2 = \lambda_2 v_1$, $v_3 = \lambda_3 v_1$,..., $v_p = \lambda_p v_1$, alors

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i v_i \\ &= \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^{i=p} \alpha_i \lambda_i v_1 \\ &= (\alpha_1 + \sum_{i=2}^{i=p} \alpha_i \lambda_i) v_1 \end{aligned}$$

ce qui entraîne $\{v_1\}$ génératrice de $\mathbf{E}$, faux.

La famille $\mathbf{L}_2 = \{v_1, v_*\}$ est donc libre, en changeant éventuellement de notation, on peut supposer $v_* = v_2$.

d) Si $\mathbf{L}_2 = \{v_1, v_2\}$ est génératrice, stop.

Supposons le contraire. En répétant le même raisonnement que précedemment, on voit qu'il existe $v_* \in \{v_3, ..., v_p\}$ tel que la famille $\mathbf{L}_3 = \{v_1, v_2, v_*\}$ est libre. On construit ainsi une suite :

$$\mathbf{L}_1 \subsetneq \mathbf{L}_2 \subsetneq \mathbf{L}_3 \subsetneq ... \subset \mathcal{G}$$

de famille libres et le processus peut être continué tant que $\mathbf{L}_k$ n'est pas génératrice. Mais $\mathcal{G}$ est une famille finie et par conséquent le processus doit s'arrêter, éventuellement pour $\mathbf{L}_k = \mathcal{G}$. Il existe donc une famille $\mathbf{L}_k$ libre et génératrice.

Cette démonstration nous permet d'obtenir une autre version du théorème précédent.

Théorème 3.5.2. *: Soit $\boldsymbol{E} \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie, alors :*

1) De toute famille génératrice on peut extraire une base.

2) (Théorème de la base incomplète). Toute famille libre peut être complétée de manière à former une base.

3.6 Les Théorèmes Fondamentaux sur la Dimension

Théorème 3.6.1. *: Dans un espace vectoriel engendré par n éléments, toute famille de plus de n éléments est liée.*

Preuve : Soit $\mathcal{F} = \{v_1, ..., v_n\}$ une famille génératrice et $\mathcal{F}' = \{w_1, ..., w_m\}$ une famille de vecteurs ($m > n$). Montrons que $\mathcal{F}'$ est liée.

1) Si l'un des $w_i = 0$, $\mathcal{F}'$ est liée. Stop.

2) Supposons tous les w_i non nuls, $w_1 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, $w_1 \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha_i \neq 0$, quitte à changer la numérotation, supposons $\alpha_1 \neq 0$ d'où $v_1 = \frac{1}{\alpha_1} w_1 - (\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 + ... + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n)$.

Pour $x \in \mathbf{E}$, $x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, en remplaçant v_1 par son expression, on constate que x est combinaison linéaire de w_1, v_2,...,v_n, d'où $\{w_1, v_2, ..., v_n\}$ est génératrice.

Considérons w_2, $w_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n$. Si $\beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_n = 0$, alors $w_2 = \beta_1 w_1$. D'où $\mathcal{F}'$ liée. Stop.

Supposons que l'un des $\beta_i \neq 0$, pour fixer les idées disons β_2, on aura $v_2 = \frac{1}{\beta_2} w_2 - \frac{1}{\beta_2}(\beta_1 w_1 + \beta_3 v_3 + ... + \beta_n v_n)$.

En raisonnant comme ci-dessus, on voit que $\{w_1, w_2, v_3, ..., v_n\}$ est génératrice.

Ainsi de proche en proche, on arrive à remplacer v_1,...,v_n par w_1,...,w_n et $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ serait génératrice. En particulier, w_{n+1} serait combinaison linéaire de w_1,...,w_n et donc $\mathcal{F}'$ serait liée.

Théorème 3.6.2. *: Dans un espace vectoriel* $\boldsymbol{E}$ *sur* $\boldsymbol{K}$ *de dimension finie, toutes les bases ont même nombre d'éléments, ce nombre entier est appelé dimension de* $\boldsymbol{E}$ *sur* $\boldsymbol{K}$ *et est noté* $dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}$.

Preuve : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases. Si $\mathcal{B}'$ avait plus d'éléments que $\mathcal{B}$ elle ne serait pas libre car $\mathcal{B}$ est génératrice.

Corollaire 3.6.1. *: Dans un espace vectoriel de dimension finie n, toute famille de plus de n éléments est liée, et une famille de moins de n éléments ne peut être génératrice.*

Preuve : Pour le 2ème point, si la famille était génératrice, on pourrait en extraire d'après un théorème du paragraphe 5, une base qui aurait moins de n éléments.

Exemple 3.6.1. *:*

1) Si $\boldsymbol{E} = \{0\}$*, on pose* $dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E} = 0$*, et* $\boldsymbol{E} = \{0\} \Leftrightarrow dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E} = 0$.

2) $dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{K}^n = n$.

3) $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_n[X] = n + 1$.

5) La dimension d'un espace vectoriel dépend non seulement de $\boldsymbol{E}$ mais aussi de $\boldsymbol{K}$, $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$ et $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$.

Proposition 3.6.1. *: Soient $\boldsymbol{E}_1,\ldots, \boldsymbol{E}_p$ des espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps $\boldsymbol{K}$, alors $dim_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{E}_1\times\ldots\times\boldsymbol{E}_p) = dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}_1+\ldots+dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}_p$*

Preuve : Soient $\{a_1, ..., a_{n_1}\}$, $\{b_1, ..., b_{n_2}\}$,..., $\{l_1, ..., l_{n_p}\}$ des bases de $\mathbf{E}_1,\ldots, \mathbf{E}_p$
respectivement.

La famille $\{(a_i, 0, ..., 0)_{i=1,...,n_1}, (0, b_i, 0, ..., 0)_{i=1,...,n_2}, ...,$
$(0, 0, ..., 0, l_i)_{i=1,...,n_p}\}$ est une base de $\mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_p$.

Exemple 3.6.2. *:*

$dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n = 2n$ et $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n = n$.

Théorème 3.6.3. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel de dimension finie n. Alors*

1) Toute famille génératrice de n éléments est une base.

2) Toute famille libre de n éléments est une base.

Preuve : 1) De cette famille, on peut extraire une base, elle doit avoir n éléments, donc c'est elle même.

2) Cette famille peut être complétée pour former une base qui doit avoir n éléments, donc c'est elle même.

Théorème 3.6.4. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel de dimension finie et $\boldsymbol{F}$ un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$. Alors*

1) $dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{F} \leq dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}$.

2) $dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{F} = dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}$.

Preuve : On pose $dim_{\mathbf{K}}\mathbf{E} = n$.

1) a) Si $dim_{\mathbf{K}}\mathbf{F} = 0$ on a $dim_{\mathbf{K}}\mathbf{F} \leq n$.

b) Si $dim_{\mathbf{K}}\mathbf{F} \neq 0$, alors $\mathbf{F} \neq \{0\}$ et donc $\mathbf{F}$ admet une base, $\mathcal{B}$, qui est une partie libre de $\mathbf{F}$ donc de $\mathbf{E} \Rightarrow$ cardinal$\mathcal{B} \leq n$ d'après Corollaire 3.6.1.

2) $\Leftarrow$) Trivial.

$\Rightarrow$) Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{F}$ ayant n éléments, elle est donc libre dans $\mathbf{F}$ et par suite dans $\mathbf{E}$, elle est donc base de $\mathbf{E}$; théorème 2.6.3, donc famille génératrice de $\mathbf{E}$, donc $\mathbf{E} = \mathbf{F}$.

3.7 Somme, Somme directe, Sous-Espaces Supplémentaires

Définition 3.7.1. *: Soient $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$. On appelle somme de $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$ le sous-espace de $\boldsymbol{E}$ défini par :*
$\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \{x \in \boldsymbol{E} / \exists x_1 \in \boldsymbol{E}_1, x_2 \in \boldsymbol{E}_2; x = x_1 + x_2\}$.

$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$, en effet
$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \subset \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ donc $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \neq \emptyset$.
$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ et $x, y \in \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \Rightarrow \exists x_1 \in \mathbf{E}_1, x_2 \in \mathbf{E}_2$ et $y_1 \in \mathbf{E}_1, y_2 \in \mathbf{E}_2$; $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ d'où $\alpha x + \beta y = \underbrace{\alpha x_1 + \beta y_1}_{\in \mathbf{E}_1} + \underbrace{\alpha x_2 + \beta y_2}_{\in \mathbf{E}_2} \in \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.

Proposition 3.7.1. *: Soient $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{E}$ et $\mathcal{G} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$. La décomposition de tout élément de $\mathcal{G}$ en somme d'un élément de $\boldsymbol{E}_1$ et d'un élément de $\boldsymbol{E}_2$ est unique si et seulement si $\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2 = \{0\}$. On écrit alors $\mathcal{G} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$, et on dit que $\mathcal{G}$ est somme directe de $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$.*

Preuve : $\Rightarrow$) Soit $x \in \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 \Rightarrow x = x + 0 = 0 + x$ d'où la non unicité.
$\Leftarrow$) Supposons $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Rightarrow x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 \Rightarrow x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$.

Définition 3.7.2. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel et $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{E}$. On dit que $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$ sont supplémentaires (ou que $\boldsymbol{E}_2$ est un supplémentaire de $\boldsymbol{E}_1$) si $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$, c.à.d $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ et $\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2 = \{0\}$.*

Proposition 3.7.2. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel de dimension finie. Alors $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$ si et seulement si pour toute base $\mathcal{B}_1$ de $\boldsymbol{E}_1$ et toute base $\mathcal{B}_2$ de $\boldsymbol{E}_2$, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\boldsymbol{E}$.*

Preuve : $\Rightarrow$) Soit $\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_p\}$, $\mathcal{B}_2 = \{v_{p+1}, ..., v_q\}$ des bases de $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$, respectivement. Alors tout $x \in \mathbf{E}$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_p v_p + \lambda_1 v_{p+1} + ... + \lambda_{q-p} v_q \Rightarrow \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbf{E}$.

$\Leftarrow$)

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i}_{\in \mathbf{E}_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{q-p} \lambda_j v_{p+j}}_{\in \mathbf{E}_2} \in \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

la décomposition étant unique suivant les bases de $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2 \Rightarrow \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 = \{0\}$.

Corollaire 3.7.1. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel. Pour tout sous-espace vectoriel $\boldsymbol{E}_1$, il existe toujours un supplémentaire ; le supplémentaire de $\boldsymbol{E}_1$ n'est pas unique, mais si $\boldsymbol{E}$ est de dimension finie, tous les supplémentaires de $\boldsymbol{E}_1$ ont même dimension.*

Preuve : On expose la démonstration en dimension finie.

Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une base de $\mathbf{E}_1$ et soit $n = dim_{\mathbf{K}}\mathbf{E}$, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $w_{p+1}, ..., w_n$ tels que $\{v_1, ..., v_p, w_{p+1}, ..., w_n\}$ soit une base de $\mathbf{E}$. En posant $\mathbf{E}_2 = \overline{\{w_{p+1}, ..., w_n\}}$, le sous-espace de $\mathbf{E}$ engendré par $\{w_{p+1}, ..., w_n\}$, on obtient un supplémentaire de $\mathbf{E}_1$ dans $\mathbf{E}$. Puisque le choix des w_i n'est pas unique, le supplémentaire de $\mathbf{E}_1$ n'est pas unique ; cependant tous les supplémentaires de $\mathbf{E}_1$ ont une dimension égale à $n - p$, p étant la dimension de $\mathbf{E}_1$.

Théorème 3.7.1. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel de dimension finie. Alors $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$ si et seulement si :*

1)$\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2 = \{0\}$.

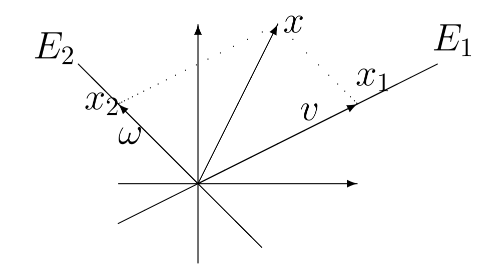
2) $dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E} = dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}_1 + dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}_2$.

Preuve : $\Rightarrow$) D'après la proposition 2.7.2.

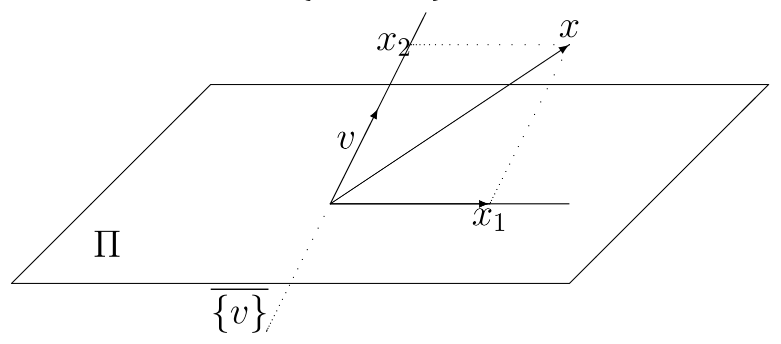
$\Leftarrow$) Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une base de $\mathbf{E}_1$ et $\{w_{p+1}, ..., w_n\}$ une base de $\mathbf{E}_2$, n étant la dimension de $\mathbf{E}$. Montrons que l'union des bases est libre :
$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p + \alpha_{p+1} w_{p+1} + ... + \alpha_n w_n = 0 \Rightarrow \underbrace{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p}_{\in \mathbf{E}_1} = -\underbrace{(\alpha_{p+1} w_{p+1} + ... + \alpha_n w_n)}_{\in \mathbf{E}_2} \Rightarrow \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p = 0$ et $\alpha_{p+1} w_{p+1} + ... + \alpha_n w_n = 0 \Rightarrow \alpha_{p+j} = \lambda_i = 0 \ \forall i = 1, ..., p$ et $\forall j = 1, ..., n - p$, d'après la proposition précedente $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \bigoplus \mathbf{E}_2$.

Exemple 3.7.1. *:*

1) Dans $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{E}_1 = \overline{\{v\}}$ et $\boldsymbol{E}_2 = \overline{\{w\}}$ où v et w sont deux vecteurs indépendants.



2) Dans $\mathbb{R}^3$*, soit* Π *un plan vectoriel et* $v \notin \Pi$*. On a* $\mathbb{R}^3 = \Pi \bigoplus \overline{\{v\}}$ *car si* $\{e_1, e_2\}$ *est une base de* Π*, alors* $\{e_1, e_2, v\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*



3) $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}_n[X]$*,* $\boldsymbol{E}_1 = \mathbb{R}$*,* $\boldsymbol{E}_2 = \{XP(X)/P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$*,* $\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2 = \{0\}$ *et* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ *d'où* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$*.*

Proposition 3.7.3. *: Soit* $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel de dimension finie et* $\boldsymbol{E}_1$ *,* $\boldsymbol{E}_2$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\boldsymbol{E}$*. On a* $dim(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2) = dim\boldsymbol{E}_1 + dim\boldsymbol{E}_2 - dim(\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2)$*. En particulier*
$dim(\boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2) = dim\boldsymbol{E}_1 + dim\boldsymbol{E}_2$*.*

Preuve : Posons $dim\mathbf{E}_1 = p$, $dim\mathbf{E}_2 = q$ et $dim(\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2) = r$ $(r \leq p, q)$.

Considérons $\{a_1, ..., a_r\}$ une base de $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2$ qu'on complète pour obtenir
$\{a_1, ..., a_r, b_{r+1}, ..., b_p\}$ une base de $\mathbf{E}_1$,
$\{a_1, ..., a_r, e_{r+1}, ..., e_q\}$ une base de $\mathbf{E}_2$.

Tout vecteur de $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ s'écrit en fonction des a_i, b_j et e_k, $1 \leq i \leq r$, $r+1 \leq j \leq p$ et $r+1 \leq k \leq q$, qui forment alors une famille génératrice de $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Elle est aussi libre car :

$$\underbrace{(\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_r a_r)}_{=x \in \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2} + \underbrace{(\beta_{r+1} b_{r+1} + ... + \beta_p b_p)}_{=y \in \mathbf{E}_1} + \underbrace{(\gamma_{r+1} e_{r+1} + ... + \gamma_q e_q)}_{=z \in \mathbf{E}_2} = 0$$

On a $x+y+z=0 \Rightarrow \underbrace{z}_{\in \mathbf{E}_2} = \underbrace{-(x+y)}_{\in \mathbf{E}_1} \Rightarrow z \in \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 \Rightarrow z$ s'exprime en fonction des a_i d'où $\gamma_{r+1}e_{r+1} + ... + \gamma_q e_q = \delta_1 a_1 + ... + \delta_r a_r$ mais $\{a_1, ..., a_r, e_{r+1}, ..., e_q\}$ est une base de $\mathbf{E}_2$ d'où $\gamma_{r+1} = ... = \gamma_q = 0 = \delta_1 = ... = \delta_r$ et on a alors $z = 0 \Rightarrow x = -y$, on en déduit aussi que $\beta_{r+1} = ... = \beta_p = 0 = \alpha_1 = ... = \alpha_r$, d'où la famille est libre, d'où base de $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.

On en déduit

$$\begin{aligned} dim(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) &= r + (p-r) + (q-r) \\ &= p + q - r \\ &= dim\mathbf{E}_1 + dim\mathbf{E}_2 - dim(\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2). \end{aligned}$$

Chapitre 4

Les Applications Linéaires

4.1 Applications Linéaires

Définition 4.1.1. *: Soient **E** et **E'** deux espaces vectoriels sur**K** et f une application de **E** dans **E'**. On dit que f est linéaire, si :*

1) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ $\forall u, v \in \boldsymbol{E}$.

2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ $\forall v \in \boldsymbol{E}$, $\forall \lambda \in \boldsymbol{K}$.

L'ensemble des applications linéaires de **E** dans **E'** est noté $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$.

Remarque 4.1.1. *:* $f(0) = 0$ *car (homomorphisme de groupes).*

Définition 4.1.2. *: Une application linéaire de **E** dans **E** est appelée endomorphisme.*

Exemple 4.1.1. *:*

1) $\Theta : \begin{array}{ccc} \boldsymbol{E} & \to & \boldsymbol{E}' \\ v & \mapsto & 0 \end{array}$ *est linéaire dite application nulle.*

2) $id_{\boldsymbol{E}} : \begin{array}{ccc} \boldsymbol{E} & \to & \boldsymbol{E} \\ v & \mapsto & v \end{array}$ *est linéaire dite application identique de **E**.*

3) $\begin{array}{l} u_{\boldsymbol{E}} \\ \alpha \in \boldsymbol{K} \end{array} : \begin{array}{ccc} \boldsymbol{E} & \to & \boldsymbol{E} \\ v & \mapsto & \alpha v \end{array}$ *est linéaire dite homothétie de rapport* α.

4) $D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & DP = P' \end{array}$ *est linéaire dite dérivation.*

5) Soit $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$.

$P_{r_1} : \begin{array}{ccc} \boldsymbol{E} & \to & \boldsymbol{E}_1 \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 \end{array}$ *est linéaire dite projection sur* $\boldsymbol{E}_1$ *parallélement à* $\boldsymbol{E}_2$.

6) Soit $v_0 \neq 0$ un vecteur de $\boldsymbol{E}$

$$\begin{array}{lllll} \tau & : & \boldsymbol{E} & \rightarrow & \boldsymbol{E} \\ & & v & \mapsto & v+v_0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \textit{application non linéaire car } \tau(0)=v_0\neq 0, \\ \textit{dite translation.} \end{array}$$

4.2 Image et Noyau

Proposition 4.2.1. *: Soit $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E'})$ et $\boldsymbol{F}$ un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$. Alors $f(\boldsymbol{F})$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$'.*
En particulier $f(\boldsymbol{E})$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$' appelé image de f et noté Imf. Sa dimension est appelée rang de f.

Preuve : On sait que $f(\mathbf{F})$ est un sous-groupe de $\mathbf{E}$', il suffit donc de vérifier la stabilité pour l'opération externe.
Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ et $f(v) \in f(\mathbf{F})$, $\lambda f(v) = f(\lambda v) \in f(\mathbf{F})$.

Proposition 4.2.2. *: Soit $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E'})$, $Kerf = \{x \in \boldsymbol{E}/f(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$, appelé noyau de f.*

Preuve : Il suffit de vérifier la stabilité pour l'opération externe.
Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ et $x \in Kerf$, $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda x \in Kerf$.

Proposition 4.2.3. *: f est injective $\Leftrightarrow Kerf = \{0\}$.*

Exemple 4.2.1. *:*
1) Soit $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$, $ImP_{r_1} = \boldsymbol{E}_1$, $KerP_{r_2} = \boldsymbol{E}_2$
2) $$\begin{array}{lllll} D & : & \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & & P & \mapsto & DP = P' \end{array}$$
$KerD = \mathbb{R}$, $ImD = \mathbb{R}[X]$.
3) $$\begin{array}{lllll} f & : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (2x+y, y-z) \end{array}$$
$Kerf = \{(x,y,z)/y = -2x \text{ et } z = y\} = \{(x,-2x,-2x)/x \in \mathbb{R}\}$ *droite vectorielle engendrée par* $(1,-2,-2)$.
$$\begin{array}{lll} Imf & = & \{(x',y')/\exists x,y,z; x' = 2x+y \text{ et } y' = y-z\} \\ & = & \left\{(x',y')/y = y'+z \text{ et } x = \frac{1}{2}(x'-y'-z)\right\} \end{array}.$$
Posons $z = 0$ donc $y = y'$ et $x = \frac{1}{2}(x'-y')$. D'où $\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2$ $\exists (\frac{1}{2}(x'-y'), y', 0) \in \mathbb{R}^3$; $f((\frac{1}{2}(x'-y'), y', 0)) = (x',y')$ donc f est surjective, et par suite $Imf = \mathbb{R}^2$.

Proposition 4.2.4. *: Soit $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E'})$ et $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs de* $\boldsymbol{E}$*.*

1) Si f est injective et la famille $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ est libre dans $\boldsymbol{E}$, alors la famille $\{f(v_i)\}_{1\leq i\leq n}$ est libre dans $\boldsymbol{E}$'.

2) Si f est surjective et la famille $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ est génératrice de $\boldsymbol{E}$, alors la famille $\{f(v_i)\}_{1\leq i\leq n}$ est génératrice de $\boldsymbol{E}$'.

En particulier si f est bijective, l'image d'une base de $\boldsymbol{E}$ est une base de $\boldsymbol{E}$'.

Preuve : 1) Comme f est une application linéaire injective, alors on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i f(v_i) &= 0\\ &\Longrightarrow f(\sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i v_i) = 0 \qquad (\ f \text{ application linéaire }) \\ &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i v_i = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1,...,n \quad \{v_i\}_{1\leq i\leq n} \text{ libre}\end{aligned}$$

2) $\forall x \in \mathbf{E}$, $\exists \lambda_i \in \mathbf{K}\,;\, x = \sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i v_i$.

Soit $y \in \mathbf{E}'$, $\exists x \in \mathbf{E}\,;\, y = f(x) = f(\sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i v_i)$ (surj) d'où $y = \sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i f(v_i)$.

Théorème 4.2.1. *: Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes, si et seulement si, ils ont même dimension.*

Preuve : $\Rightarrow$) $f : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ isomorphisme, d'après la proposition précédente l'image d'une base de **E** est une base de **E**', donc **E** et **E**' ont même dimension.

$\Leftarrow$) Supposons $dim\mathbf{E} = dim\mathbf{E}'$, soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de **E** et $\{e'_1, ..., e'_n\}$ une base de **E**'. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{E}' \\ & e_k & \longmapsto & e'_k \end{array}$$

Pour $x = \sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i e_i$, on pose $f(x) = f(\sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i e'_i$, on vérifie que f est linéaire bijective.

Corollaire 4.2.1. *: $\boldsymbol{E}$ espace vectoriel de dimension finie sur $\boldsymbol{K}$.*

$\boldsymbol{E}$ est isomorphe à $\boldsymbol{K}^n \Longleftrightarrow dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E} = n$.

Théorème 4.2.2. *(Théorème de la dimension) : Soient $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}$' deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$, alors $dim\boldsymbol{E} = dim(Kerf) + dim(Imf)$.*

Preuve : Supposons $dim\mathbf{E} = n$, $dim(Kerf) = r$ et montrons que $dim(Imf) = n - r$.

Soit $\{w_1, ..., w_r\}$ une base de $Kerf$, complétons la pour obtenir une base de $\mathbf{E}$ en l'occurrence $\{w_1, ..., w_r, v_1, ..., v_{n-r}\}$.

Montrons que $\mathcal{B} = \{f(v_1), ..., f(v_{n-r})\}$ est une base de Imf.

1) $\mathcal{B}$ engendre Imf, en effet :

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i f(v_i).$$

b) $\mathcal{B}$ est libre :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i f(v_i) &= 0 \\
&\Longrightarrow f(\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i) = 0 \qquad (f \text{ application linéaire}) \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i \in Kerf \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i = 0 \\
&\Longrightarrow \lambda_i = 0, i = 1, ..., n-r; \quad \alpha_i = 0, i = 0, ..., r
\end{aligned}$$

Corollaire 4.2.2. *: Soit $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$, $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}$' étant deux espaces vectoriels de même dimension finie, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) f est injective.

2) f est surjective.

3) f est bijective.

Preuve : $dim\mathbf{E} = dim(Kerf) + dim(Imf)$. Il suffit de montrer 1) $\Longleftrightarrow$ 2).

f injective $\iff Kerf = \{0\} \iff dim\mathbf{E} = dim(Imf) \iff dim\mathbf{E}' = dim(Imf) \iff \mathbf{E}' = Imf \iff f$ est surjective.

Remarque 4.2.1. *: 1) Ce résultat est faux en dimension infinie.*

En effet :

$$\begin{array}{rcl} D : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & DP = P' \end{array}$$ *est surjective, non injective.*

2) Une application linéaire f est parfaitement définie si on connaît l'image des vecteurs d'une base, car d'après la linéarité de f on a $f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$, donc si on connaît $f(e_1)$,..., $f(e_n)$, f est connue en tout x.

4.3 Matrices Associées aux Applications Linéaires

Soient **E** et **E**' deux espaces vectoriels sur **K**, de dimension finie n et p respectivement, et $f : \mathbf{E} \longmapsto \mathbf{E}'$ une application linéaire. Choisissons $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de **E** et $\{e'_1, ..., e'_p\}$ une base de **E**'. Les images par f des vecteurs $\{e_1, ..., e_n\}$ se décomposent sur la base $\{e'_1, ..., e'_p\}$:

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{p1}e'_p \\ f(e_2) & = & a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{p2}e'_p \\ & = & \\ & \vdots & \\ & = & \\ f(e_n) & = & a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{pn}e'_p \end{array}$$

Définition 4.3.1. *: On appelle matrice de f dans les bases $\{e_1, ..., e_n\}$ et $\{e'_1, ..., e'_p\}$, la matrice notée par $M(f)_{e_i, e'_j}$ appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\boldsymbol{K})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1), ..., f(e_n)$ dans la base $\{e'_1, ..., e'_p\}$:*

$f(e_1) \;\; f(e_2) \;\; . \;\; .... \;\; . \;\; f(e_n)$

$$M(f)_{e_i,e'_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & \dots & . & a_{1n} \\ . & & & & & . \\ \vdots & & & & & \vdots \\ . & & & & & . \\ a_{p1} & a_{p2} & . & \dots & . & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_{p-1} \\ e'_p \end{matrix}$$

*Il est clair que la matrice associée à f dépend du choix des bases de **E** et **E**'.*

Exemple 4.3.1. *:*

*1) Soit **E** un espace vectoriel de dimension n et*

$$\begin{array}{rcccl} id_{\boldsymbol{E}} & : & \boldsymbol{E} & \longrightarrow & \boldsymbol{E} \\ & & x & \longmapsto & x \end{array}$$

*On considère une base $\{e_i\}$ de **E**.*

$$M(id_{\boldsymbol{E}})_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & \dots & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & . & 0 \\ 0 & 0 & . & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n \text{ matrice unité de } \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K}).$$

2) Soit $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}^2$ *et* $\begin{array}{rcccl} Pr_1 & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x,0) \end{array}$

Considérons la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ on a $Pr_1(e_1) = e_1$, $Pr_1(e_2) = 0$.

$$M(Pr_1)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{e'_1, e'_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Considérons l'application linéaire :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, z-y) \end{array}$$

$$M(f)_{e_i,e'_j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4) On considère la forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \end{array}$$

En munissant $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ de leurs bases canoniques respectives $\{e_i\}$ et $\{1\}$ on obtient $M(f)_{e_i,1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$

5) $\begin{array}{llll} D & : & \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & & P & \longmapsto & DP = P' \end{array}$

$M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *par rapport aux bases canoniques de* $\mathbb{R}_4[X]$ *et* $\mathbb{R}_3[X]$.

Proposition 4.3.1. *: Soient* $\boldsymbol{E}$ *et* $\boldsymbol{E}$*' deux espaces vectoriels sur* $\boldsymbol{K}$ *de dimension n et p respectivement, $\{e_i\}$ et $\{e'_j\}$ des bases de* $\boldsymbol{E}$ *et* $\boldsymbol{E}$*'. Alors l'application :*

$\begin{array}{llll} M & : & \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}') & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\boldsymbol{K}) \\ & & f & \longmapsto & M(f)_{e_i,e'_j} \end{array}$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels c'est à dire :

$M(f+g) = M(f) + M(g)$, $M(\lambda f) = \lambda M(f)$ et M est bijective, en particulier $dim\mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}') = np$.

Preuve :

$$M(f+g)_{e_i,e'_j} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (f+g)(e_1) & \dots & (f+g)(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & \dots & - \\ - & \dots & - \\ - & \dots & - \\ - & \dots & - \\ - & \dots & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & \dots & - \\ - & \dots & - \\ - & \dots & - \\ - & \dots & - \\ - & \dots & - \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(e_1) & \dots & g(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & \dots & - \\ - & \dots & - \\ - & \dots & - \\ - & \dots & - \\ - & \dots & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= M(f)_{e_i,e'_j} + M(g)_{e_i,e'_j}$$

De même

$$M(\lambda f)_{e_i,e'_j} = \begin{pmatrix} - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \end{pmatrix} = \lambda M(f)_{e_i,e'_j}$$

(colonnes : $(\lambda f)(e_1)$ . . . $(\lambda f)(e_n)$)

donc M est linéaire.

Soit $f \in KerM \Longrightarrow M(f)_{e_i,e'_j} = 0 \Longrightarrow f(e_1) = f(e_2) = ... = f(e_n) = 0$, donc si $x \in \mathbf{E}$ $x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i$, $f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(e_i) = 0$, d'où $f = 0$, donc M est injective.

Elle est aussi surjective, car si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \\ a_{p1} & & ... & a_{pn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$$

On considère f en posant :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e'_1 + ... + a_{p1}e'_p \\ &\vdots \\ f(e_n) &= a_{1n}e'_1 + ... + a_{pn}e'_p. \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbf{E}$; $x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$, on pose $f(x) = \lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n)$. On vérifie que f est linéaire et $M(f)_{e_i,e'_j} = A$.

4.4 Matrice d'un Vecteur. Calcul de l'Image d'un Vecteur

Définition 4.4.1. *: Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension n, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de $\mathbf{E}$ et $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$ un vecteur de $\mathbf{E}$. On appelle matrice de x dans la base $\{e_i\}$:*

$$M(x)_{e_i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Proposition 4.4.1. *: Soit* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E'})$*,* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *et* $\{e'_1, e'_2, ..., e'_p\}$ *deux bases de* $\boldsymbol{E}$ *et* $\boldsymbol{E}$*' respectivement, pour tout* $x \in \boldsymbol{E}$*, on a :*

$M(f(x))_{e'_j} = M(f)_{e_i,e'_j} M(x)_{e_i}$.

Preuve : Soit $M(f)_{e_i,e'_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \\ a_{p1} & & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$

d'où $f(e_j) = \sum_{k=1}^{p} a_{kj} e'_k$.

On a

$$f(x) = f(\sum_{j=1}^{j=n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{j=n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{j=n} x_j \sum_{k=1}^{p} a_{kj} e'_k$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \underbrace{(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{kj})}_{y_k} e'_k = \sum_{k=1}^{p} y_k e'_k$$

donc $M(f(x))_{e'_j} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$.

D'autre part

$$M(f)_{e_i,e'_j} M(x)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \\ a_{p1} & & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \vdots \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \\ \vdots \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j \end{pmatrix}$$

d'où le résultat.

Exemple 4.4.1. *:*

Soit le plan rapporté à sa base canonique. Déterminer l'image du vecteur $x = (3, 2)$ *par rotation de centre O et d'angle* $\frac{\Pi}{6}$*.*

On a

$$\begin{aligned} M(f(x)) &= M(f)M(x) \\ &= \begin{pmatrix} cos\frac{\Pi}{6} & -sin\frac{\Pi}{6} \\ sin\frac{\Pi}{6} & cos\frac{\Pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}-2}{2} \\ \frac{2\sqrt{3}+3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} .$$

4.5 Matrice de l'Inverse d'une Application

Proposition 4.5.1. *: Soient* ***E****,* ***E****',* ***E****" trois espaces vectoriels sur* ***K****,* $\{e_1, ..., e_n\}$, $\{e'_1, ..., e'_p\}$, $\{e''_1, ..., e''_q\}$ *des bases de* ***E****,* ***E****' et* ***E****" respectivement. Si* $g \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$ *et* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}', \boldsymbol{E}'')$*, on a* $M(fog)_{e_i, e''_k} = M(f)_{e'_j, e''_k} M(g)_{e_i, e'_j}$.

Preuve : Soit $x \in \mathbf{E}$ arbitraire. En utilisant la proposition du paragraphe 2, on a :
$M(fog)M(x) = M(f(g(x))) = M(f)M(g(x)) = M(f)M(g)M(x)$. Puisque x est arbitraire, $M(fog) = M(f)M(g)$.

Proposition 4.5.2. *:* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$ *est bijective si et seulement si* $M(f)_{e_i, e'_j}$ *est inversible.*

De plus $M(f^{-1})_{e'_i, e_j} = M(f)^{-1}_{e_i, e'_j}$.

Preuve : $f^{-1}of = id_{\mathbf{E}}$, d'où
$M(f^{-1}of)_{e_i, e_i} = M(id_{\mathbf{E}}) = I \Longrightarrow M(f^{-1})M(f) = I \Longrightarrow M(f^{-1}) = M(f)^{-1}$.

4.6 Changement de Bases

Définition 4.6.1. *: On appelle matrice de passage de la base* $\{e_i\}$ *à la base* $\{e'_i\}$ *du même espace vectoriel* ***E****, la matrice* $P_{e_i \to e'_i}$ *dont les colonnes sont les composantes des vecteurs* e'_i *dans la base* $\{e_i\}$ *:*

$$P_{e_i \to e'_i} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = M(id_{\boldsymbol{E}})_{e'_i, e_i}.$$

Remarque 4.6.1. *: Une matrice de passage est toujours inversible et on a* $(P_{e_i \to e'_i})^{-1} = P_{e'_i \to e_i}$.

Proposition 4.6.1. *: Soient* $x \in \boldsymbol{E}$, $\{e_i\}$ *et* $\{e'_i\}$ *deux bases de* $\boldsymbol{E}$, $P = P_{e_i \to e'_i}$ *et* $X = M(x)_{e_i}$, $X' = M(x)_{e'_i}$, *on a* $X' = P^{-1}X$.

Preuve : $PX' = M(id_{\mathbf{E}})_{e'_i, e_i} M(x)_{e'_i} = M(id_{\mathbf{E}}(x))_{e_i} = M(x)_{e_i} = X.$

Exemple 4.6.1. *:*

Soit $\mathbb{R}^2$ *muni de deux bases, la base canonique* $\{e_1, e_2\}$ *et la base* $\{e'_1, e'_2\}$ *définie par :*

$e'_1 = 2e_1 + e_2$, $e'_2 = 3e_1 + 2e_2$

Soit $x = 2e_1 + 3e_2$, *calculons les composantes de* x *dans la base* $\{e'_1, e'_2\}$.

$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$x = -5e'_1 + 4e'_2$.

Proposition 4.6.2. *: Soient* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E'})$, $\{e_1, ..., e_n\}$, $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ *deux bases de* $\boldsymbol{E}$ *et* $\left\{e'_1, ..., e'_p\right\}$, $\left\{\varepsilon'_1, ..., \varepsilon'_p\right\}$ *deux bases de* $\boldsymbol{E}$*'.*

Notons $A = M(f)_{e_i, e'_j}$, $A' = M(f)_{\epsilon_i, \varepsilon'_j}$, $P = P_{e_i \to \varepsilon_i}$, $Q = P_{e'_j \to \varepsilon'_j}$.

On a alors $A' = Q^{-1}AP$.

Preuve :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}_{(e_i)} & \xrightarrow{f} & \mathbf{E}'_{(e'_j)} \\ id_{\mathbf{E}} \downarrow & & \downarrow id_{\mathbf{E}'} \\ \mathbf{E}_{(\varepsilon_i)} & \xrightarrow{f} & \mathbf{E}'_{(\varepsilon'_j)} \end{array}$$

On a $foid_{\mathbf{E}} = id_{\mathbf{E}}\text{'}of$ d'où $M(foid_{\mathbf{E}}) = M(id_{\mathbf{E}}\text{'}of)$, c'est à dire

$$M(f)_{\varepsilon_i, \varepsilon'_j} M(id_{\mathbf{E}})_{e_i, \varepsilon_i} = M(id_{\mathbf{E}}\text{'})_{e'_j, \varepsilon'_j} M(f)_{e_i, e'_j},$$

c'est à dire $A'P^{-1} = Q^{-1}A$ donc $A' = Q^{-1}AP$.

Corollaire 4.6.1. *: Soient* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$ *et* $\{e_1, ..., e_n\}$, $\{e'_1, ..., e'_n\}$ *deux bases de* $\boldsymbol{E}$.

Notons $A = M(f)_{e_i}$, $A' = M(f)_{e'_i}$ *et* $P = P_{e_i \to e'_i}$.

On a alors $A' = P^{-1}AP$.

Définition 4.6.2. *: Deux matrices A, $A' \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$ inversible telle que :*

$A' = P^{-1}AP$.

Exemple 4.6.2. *:*

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui dans la base canonique $\{e_i\}$ est représenté par la matrice : $A = M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminons la matrice A' qui représente f dans la base $e'_1 = (0, -1)$ et $e'_2 = (1, 1)$.

$$\text{On a} \quad \begin{aligned} A' &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} .$$

4.7 Rang d'une Matrice

Définition 4.7.1. *: Soit $\{v_1, ..., v_n\}$ une famille de vecteurs, on appelle rang de la famille, la dimension de l'espace engendré par les vecteurs v_i.*

Soit $A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\boldsymbol{K})$, $A = (c_1, ..., c_n)$ où l'on a noté c_i les vecteurs colonnes de A ($c_i \in \boldsymbol{K}^p$). On appelle rang de A le rang de la famille des vecteurs colonnes de A.

Proposition 4.7.1. *: Soit $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E'})$. Soient $\{e_1, ..., e_n\}$ et $\{e'_1, ..., e'_p\}$ deux bases quelconques de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E'}$ respectivement et $A = M(f)_{e_i, e'_j} = (a_{ij})$.*

On a alors $rang f = rang A$.

Ainsi deux matrices qui représentent la même application linéaire dans des bases différentes ont même rang; en particulier deux matrices semblables ont même rang.

Preuve : On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \xrightarrow{h} & \mathbf{K}^p \\ u\downarrow & & \downarrow v \quad h = v^{-1}ofou \\ \mathbf{E}_{(e_i)} & \xrightarrow{f} & \mathbf{E'}_{(e'_j)} \end{array}$$

u et v sont définis en associant à chaque vecteur de la base canonique de $\mathbf{K}^n$ (resp $\mathbf{K}^p$)
ε_i (resp ε'_j) le vecteur e_i (resp e'_j), alors l'application h a précisément A comme matrice dans les deux bases canoniques car $h(\varepsilon_i) = v^{-1}ofou(\varepsilon_i) = v^{-1}of(e_i) = v^{-1}(\sum a_{ij}e'_j) = \sum_j a_{ji}\varepsilon'_j$. Donc $rangA = rangh$ et d'après le lemme suivant, on déduit que $rangA = rangf$

Lemme 4.7.1. *: Soient $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{E})$, alors*

1) Si g est surjective, alors $rangf = rang(fog)$.

2) Si f est injective, alors $rangg = rang(fog)$.

Preuve : 1) $rangf = dimf(\mathbf{E}) = dimf(g(\mathbf{G})) = dim(fog)(\mathbf{E})$
$= rang(fog)$

2) Soit $\{v_i\}$ avec $v_i = g(w_i)$ une base de Img, alors $f(v_i) = (fog)(w_i)$. Comme f est injective $\{f(v_i)\}$ est libre et engendre $Im(fog)$ car $y \in Im(fog) \Longrightarrow \exists x\,;\, y = f(\underbrace{g(x)}_{\in Img}) = f(\sum \alpha_i v_i) = \sum \alpha_i f(v_i)$ donc $\{f(v_i)\}$ est une base de $Im(fog)$, d'où $rangg = rang(fog)$.

On en déduit qu'en composant à gauche ou à droite par une application linéaire bijective, le rang ne change pas.

4.8 Matrices Remarquables

a) Matrice Diagonale $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})\,;\, a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

b) Matrice Triangulaire Supérieure $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})\,;\, a_{ij} = 0$ pour $i > j$.

c) Transposée d'une Matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$; c'est ${}^tA = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$. Elle vérifie ${}^t({}^tA) = A$, ${}^t(A+B) ={}^t A +{}^t B$, ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$ $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$; c'est à dire que l'application :

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}) \\ & A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels

On a aussi ${}^t(AB) ={}^t B {}^tA$ $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$.

Définition 4.8.1. *: $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\boldsymbol{K})$ sont équivalentes s'il existe $P \in Gl_p(\boldsymbol{K})$ et $Q \in Gl_n(\boldsymbol{K})$ telles que $B = Q^{-1}AP$. C'est en fait une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\boldsymbol{K})$, notée $\simeq$.*

Théorème 4.8.1. *: $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\boldsymbol{K})$ sont équivalentes si et seulement si $rangA = rangB$.*

Démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.8.1. *: $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\boldsymbol{K})$;*

$$rangA = r \Longleftrightarrow \left(A \simeq \begin{pmatrix} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix}}}^{\in \mathcal{M}_{r,r}(\boldsymbol{K})} & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ & & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} \\ 0 \dots & \dots \dots \dots \dots \; 0 \end{pmatrix} \right)$$

Cette dernière est notée J_r.

Preuve : $\Leftarrow$) trivial.

$\Rightarrow$) $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ définit une application linéaire $\Phi : \mathbf{K}^p_{(e_i)} \longrightarrow \mathbf{K}^n_{(e'_j)}$. On munit $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$ des bases canoniques (e_i) et (e'_j) respectivement.

Soit r le nombre de vecteurs linéairement indépendants parmi les images des vecteurs de la base (e_i) ; c.à.d Ae_1,...,Ae_p, qu'on peut supposer être Ae_1,...,Ae_r, les autres vecteurs Ae_{r+1},...,Ae_p peuvent s'exprimer en fonction de ces derniers :

$$Ae_k = \sum_{j=1}^{r} c_{kj} Ae_j \text{ pour } k = r+1, ..., p.$$

On définit une nouvelle base $f_1, ..., f_p$ dans $\mathbf{K}^p$; comme suit

$$f_k = \begin{cases} e_k, & \text{pour k=1,...,r ;} \\ e_k - \sum_{j=1}^{r} c_{kj} e_j, & \text{pour k=r+1,...,p.} \end{cases}$$

On a alors $Af_k = 0$ pour $k = r+1, ..., p$.

Posons alors $Af_j = t_j$ pour $j = 1, ..., r$. Les t_j sont par hypothèse linéairement indépendants. Complétons les pour obtenir une base de $\mathbf{K}^n$, disons $t_{r+1}, ..., t_n$. Considérons alors la matrice de l'application linéaire Φ dans les nouvelles bases $f_1, ..., f_p$ et $t_1, ..., t_n$, on a alors :

$$M(\Phi)_{f_i,t_j} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1\,0\ldots 0 \\ 0\,1\,0\,\vdots \\ \vdots\,\ddots\,\ddots \\ 0\ldots 0\,1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ & & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \\ 0... & \ldots... \ldots ... 0 \end{pmatrix} = J_r$$

A et $M(\Phi)_{f_i,t_j}$ représentent la même application linéaire, et sont donc équivalentes.

Preuve du théorème : $\Rightarrow$) trivial.

$\Leftarrow$) $rangA = rangB = r$ entraînent $A \simeq J_r$, $B \simeq J_r$, d'où $A \simeq B$.

Théorème 4.8.2. *: Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\boldsymbol{K})$, alors $rangA = rang^tA$ c'est à dire que le rang d'une matrice ; est aussi le rang de la famille des vecteurs lignes.*

Preuve : $rangA = r \Longrightarrow A \simeq J_r \Longrightarrow \exists P \in Gl_p(\mathbf{K})$ et $Q \in Gl_n(\mathbf{K})$, $A = Q^{-1}J_rP \Longrightarrow {}^tA = {}^tP\ {}^tJ_r\ {}^tQ^{-1} = ({}^tP^{-1})^{-1}\ {}^tJ_r\ ({}^tQ^{-1}) = {}^t(P^{-1})^{-1}\ J'_r$ $({}^tQ^{-1})$ car ${}^tJ_r = J'_r$ d'où ${}^tA \simeq J'_r \Longrightarrow rang^tA = r = rangA$.

Exemple 4.8.1. *:*

Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

On utilise les opérations élémentaires sur les lignes

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 + L_1 - 2L_2 \end{matrix} = 2$$

Car les deux vecteurs lignes sont linéairement indépendants.

4.9 Application des Déterminants à la Théorie du Rang

4.9.1 Caractérisation des Bases

Théorème 4.9.1. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel de dimension n. Les vecteurs $v_1, ..., v_n$ de $\boldsymbol{E}$ forment une base de $\boldsymbol{E}$ si et seulement si det $\left\| v_1, \cdots, v_n \right\|_{(e_i)} \neq$*

0 où $\left\|v_1, \cdots, v_n\right\|_{(e_i)}$ *désigne la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs* $v_1, ..., v_n$ *dans la base* (e_i) *de* $\boldsymbol{E}$.

Preuve : Il suffit de montrer que $\{v_1, ..., v_n\}$ est libre si et seulement si $det\left\|v_1, \cdots, v_n\right\|_{(e_i)} \neq 0$.

$\Longleftarrow$) $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i v_i = 0$, posons $v_i = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ki} e_k$, alors on a

$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i (\sum_{k=1}^{k=n} a_{ki} e_k) = 0$ d'où $\sum_{i,k}^{n} \alpha_i a_{ki} e_k = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{1i} = 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{2i} = 0$, ..., $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{ni} = 0 \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

d'où $\alpha_i = 0 \ \forall i = 1, ..., n$

$\Longrightarrow$) Si $det\left\|v_1, \ \ldots \ , v_n\right\|_{(e_i)} = 0 \Longrightarrow$ le système homogène (4.1) admet une infinité de solutions, d'où $\{v_1, ..., v_n\}$ est liée.

4.9.2 Comment reconnaître si une famille de vecteurs est libre

On appelle mineur d'une matrice A, tout déterminant d'une matrice carrée extraite de A.

Théorème 4.9.2. *: Soient* $\{v_1, ..., v_r\}$ *r vecteurs d'un espace vectoriel* $\boldsymbol{E}$ *de dimension n (* $r \leq n$ *) et* $A = \left\|v_1, \cdots, v_r\right\|$,
($A \in \mathcal{M}_{n,r}(\boldsymbol{K})$ *).*

La famille $\{v_1, ..., v_r\}$ *est libre si et seulement si on peut extraire de A un mineur d'ordre r non nul.*

Preuve : Similaire à celle du théorème précédent, en complétant les vecteurs afin de former une base de **E**.

4.9.3 Comment reconnaître si un vecteur appartient à l'espace engendré par d'autres vecteurs

Soit A une matrice et δ un mineur d'ordre r extrait de A. On appelle bordant de δ tout mineur d'ordre $r+1$ extrait de A, dont δ est un déterminant extrait.

Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ et δ un mineur d'ordre r, il ya exactement $(p-r)(n-r)$ bordants de δ dans A.

Théorème 4.9.3. *: Soient $\{v_1, ..., v_r\}$ r vecteurs linéairement indépendants et δ un mineur d'ordre r non nul extrait de A, où $A = \left\| v_1, \cdots, v_r \right\|$.*

Pour qu'un vecteur $w \in \langle v_1, ..., v_r \rangle$ il faut et il suffit que tous les bordants de δ dans la matrice $B = \left\| v_1, \cdots, v_r, w \right\|$ soient nuls.

Preuve : $\Longrightarrow$) Si l'un des bordants est non nul, la famille $\{v_1, ..., v_r, w\}$ serait libre.

$\Longleftarrow$) On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{matrix}} & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{r+1,1} & \ldots & a_{r+1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nr} \end{matrix} & \begin{matrix} b_{r+1} \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \end{pmatrix}$.

Quitte a changer l'ordre des lignes et des colonnes, on peut supposer que le mineur δ non nul est le mineur encadré. Les r premiers vecteurs lignes de B sont indépendants, et chacun des autres est lié à ces derniers. Ainsi $rangB = r$, donc les vecteurs colonnes de B $\{v_1, ..., v_r, w\}$ forment une famille de rang r et comme $\{v_1, ..., v_r\}$ est libre, $w \in \langle v_1, ..., v_r \rangle$.

Exemple 4.9.1. *: Pour quelles valeurs de α, $\beta \in \mathbb{R}$ le vecteur $w = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ appartient-il au sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et*

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

On a $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$ $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ *et*

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \alpha \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \beta \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Les bordants de δ *sont* $\triangle_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha$ *et* $\triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \beta - 2$. *Donc* $w \in \langle v_1, v_2 \rangle$ *si et seulement si* $\alpha = 1$ *et* $\beta = 2$.

4.9.4 Détermination du rang

Théorème 4.9.4. *: Soit* $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\boldsymbol{K})$*. Le rang de* A *est* r *si et seulement si on peut extraire de* A *un mineur* δ *d'ordre* r *non nul et tous les bordants de* δ *dans* A *sont nuls.*

Preuve :

$$\Longleftarrow)\ A = \left\| v_1, \cdots, v_n \right\| = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{matrix}} & \begin{matrix} \ldots & a_{1n} \\ & \vdots \\ \ldots & a_{rn} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{r+1,1} & \ldots & a_{r+1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pr} \end{matrix} & \begin{matrix} \ldots & a_{r+1,n} \\ & \vdots \\ \ldots & a_{pn} \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Soit δ le mineur encadré. Les vecteurs $\{v_1, ..., v_r\}$ sont alors indépendants

et chaque vecteurs v_s ($s \geq r+1$) appartient à l'espace $\langle v_1, ..., v_r \rangle$. Donc les vecteurs colonnes engendrent un espace de dimension r, d'où $rangA = r$.

$\Longrightarrow$) Quitte à changer l'ordre des colonnes de A, on peut supposer que $\{v_1, ..., v_r\}$ est libre. On peut alors extraire de la matrice formée par les r premières colonnes de A un mineur δ d'ordre r non nul. Quitte à changer la numérotation des coordonnées, on peut supposer que δ soit le mineur formé par les r premières colonnes de A. Or $rangA = r$, d'où $v_s \in \langle v_1, ..., v_r \rangle$ pour $s \geq r+1$; d'après le théorème 4.9.3 tous les bordants de δ dans sont nuls.

Théorème 4.9.5. *: Le rang d'une matrice A est l'ordre maximal des mineurs non nuls extraits de A, c'est à dire :*

$$rangA = r \Longleftrightarrow \begin{cases} 1) & \textit{Il existe un mineur d'ordre } r \textit{ non nul} \\ 2) & \textit{Tous les mineurs d'ordre } s > r \textit{ sont nuls.} \end{cases}$$

Preuve : $\Longrightarrow$) S'il existait un mineur d'ordre $s > r$ non nul, on pourrait extraire des colonnes de A une famille libre formée de $s > r$ vecteurs, or ceci est impossible car les vecteurs colonnes de A engendrent un espace de dimension r.

$\Longleftarrow$) Découle du théorème 4.9.4.

Chapitre 5

Valeurs Propres et Vecteurs Propres

E désignera par la suite un espace vectoriel sur un corps **K** ($\mathbf{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$), de dimension finie n, $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et f un endomorphisme de **E**. Une base de étant choisie dans **E**, on utilisera la même notation pour désigner un vecteur $x \in \mathbf{E}$ et ses composantes $\in \mathbf{K}$. La bijection $f \longrightarrow M(f)$ où $M(f)$ est la matrice de f, permet d'étendre les notions définies pour f à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et vice-versa.

5.1 Valeurs Propres et vecteurs propres

Soit A une matrice carrée d'ordre n ; $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, ($\mathbf{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$) ; on s'intéresse à l'équation du type

$$Ax \;=\; \lambda x \tag{5.1}$$

où $\lambda \in \mathbf{K}$ et $x \in \mathbf{E}$. On constate que $x = 0$ est une solution triviale ; notre but est de trouver celles qui sont non triviales ; de telles solutions sont appelées vecteurs propres de A.

Définition 5.1.1. *: On appelle valeur propre de A, tout élément λ de* ***K*** *tel qu'il existe un vecteur $x \neq 0$ vérifiant $Ax = \lambda x$. L'équation (5.1) est équivalente à :*

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{5.2}$$

On sait que (5.2) n'a pas de solution triviale si et seulement si $det(A - \lambda I) = 0$ où det désigne le déterminant. Si l'on développe le déterminant, on

trouve un polynôme de degré n en λ, appelé le polynôme caractéristique de A et est noté $p_A(\lambda)$; c.à.d $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$.

Théorème 5.1.1. *: Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique, et les vecteurs propres correspondants sont les solutions non triviales de*

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Exemple 5.1.1. *:*

Trouver les valeurs et vecteurs propres de la matrice :
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$
Le polynôme caractéristique de A est :
$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 4 & -8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda,$

qui a pour racines 0 et -7, les valeurs propres sont donc 0 et -7. Pour déterminer les vecteurs propres correspondants, remplaçons λ par 0 et -7 dans (5.2), on obtient :

Pour $\lambda = 0$, $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ c'est à dire $x_1 = 2x_2$, donc $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Pour $\lambda = -7$, on a $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Remarque 5.1.1. *: On utilisera les abréviations v_p pour valeur propre et V_p pour vecteur propre.*

Théorème 5.1.2. *: 1) A tout vecteur propre $x \neq 0_{\boldsymbol{E}}$ de A correspond une valeur propre λ.*

2) A toute valeur propre λ de A correspond un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$ noté $\boldsymbol{E}_\lambda = \{x \in \boldsymbol{E} / Ax = \lambda x\}$ tel que $\boldsymbol{E}_\lambda \neq \{0_{\boldsymbol{E}}\}$, et $A(\boldsymbol{E}_\lambda) \subset \boldsymbol{E}_\lambda$ (c'est à dire $\boldsymbol{E}_\lambda$ est stable par A).

Preuve : 1) Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes associées à x, c'est à dire $Ax = \lambda_1 x$ et $Ax = \lambda_2 x$ d'où $\lambda_1 x = \lambda_2 x$ ce qui entraîne

$(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $x = 0_{\mathbf{E}}$.

2) a) $\mathbf{E}_\lambda \neq \emptyset$ car $A0_{\mathbf{E}} = 0_{\mathbf{E}} = \lambda 0_{\mathbf{E}}$ c.à.d $0_{\mathbf{E}} \in \mathbf{E}_\lambda$.

b) $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K}$ et $x_1, x_2 \in \mathbf{E}$ entraînent $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) = \alpha_1 \lambda x_1 + \alpha_2 \lambda x_2 = \lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$. Donc $\mathbf{E}_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$.

c) $\mathbf{E}_\lambda \neq \{0_{\mathbf{E}}\}$ car λ valeur propre entraîne l'existence d'un $x \neq 0_{\mathbf{E}}$ tel que $Ax = \lambda x$ c.à.d $x \in \mathbf{E}_\lambda$.

d) $A(\mathbf{E}_\lambda) \subset \mathbf{E}_\lambda$ car si $x \in \mathbf{E}_\lambda$, $Ax = \lambda x \in \mathbf{E}_\lambda$.

Remarque 5.1.2. : *$\boldsymbol{E}_\lambda$ est appelé le sous-espace propre associé à λ.*

5.2 Propriétés des vecteurs propres et valeurs propres

Théorème 5.2.1. : *Si $A \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$ et $\lambda \in \boldsymbol{K}$, alors on a les équivalences suivantes :*

1) λ est une valeur propre de A.

2) $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible.

3) $det(A - \lambda I) = 0$.

Preuve : 1) $\Longrightarrow$ 2) λ est une valeur propre de A entraîne l'existence d'un $x \neq 0_{\mathbf{E}}$ tel que $Ax = \lambda x$ c.à.d $Ax - \lambda x = 0_{\mathbf{E}}$ d'où $(A - \lambda I)x = 0_{\mathbf{E}}$ $(*)$, ce qui entraîne $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible, car si $(A - \lambda I)$ est inversible, en multipliant $(*)$ par $(A - \lambda I)^{-1}$ on aurait $x = 0_{\mathbf{E}}$.

2) $\Longrightarrow$ 3) Trivial.

3) $\Longrightarrow$ 1) Voir Théorème 5.1.1.

Remarque 5.2.1. : *0 est une valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible.*

Proposition 5.2.1. : *1) Si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de A, alors $\boldsymbol{E}_{\lambda_1} \cap \boldsymbol{E}_{\lambda_2} = \{0_{\boldsymbol{E}}\}$.*

2) Si $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont des valeurs propres distinctes d'une matrice carrée A et $e_1, ..., e_m$ les vecteurs propres correspondants, alors le système $\{e_1, ..., e_m\}$ est libre.

Preuve : 1) Soit $x \in \mathbf{E}_{\lambda_1} \cap \mathbf{E}_{\lambda_2}$, alors $x \in \mathbf{E}_{\lambda_1}$ d'où $Ax = \lambda_1 x$ et $x \in \mathbf{E}_{\lambda_2}$ d'où $Ax = \lambda_2 x$; on a alors $\lambda_1 x = \lambda_2 x$ c.à.d $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, or $\lambda_1 \neq \lambda_2$, donc $x = 0_{\mathbf{E}}$.

2) On procède par récurrence

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_m e_m \ = \ 0_{\mathbf{E}} \tag{5.3}$$

On applique A, on obtient $\alpha_1\lambda_1 e_1 + ... + \alpha_m \lambda_m e_m = 0_{\mathbf{E}}$, on multiplie (5.3) par λ_m et en soustrayant on a : $\alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)e_1 + ... + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})e_{m-1} = 0_{\mathbf{E}}$.

L'hypothèse de récurence entraîne $\alpha_i = 0$ pour $i = 1, ..., m-1$, en remplaçant dans (5.3) on obtient $\alpha_m = 0$.

Corollaire 5.2.1. *: 1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$, alors A a au plus n valeurs propres distinctes deux à deux.*

2) Si $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont des valeurs propres distinctes d'une matrice carrée A, alors le sous-espace vectoriel $\boldsymbol{E}_{\lambda_1} + ... + \boldsymbol{E}_{\lambda_m}$ est somme directe de $\boldsymbol{E}_{\lambda_1}, ..., \boldsymbol{E}_{\lambda_m}$.

Preuve : 1) Si A admet m valeurs propres distinctes deux à deux avec $m > n$ et $e_1, ..., e_m$ les vecteurs propres associés aux λ_i, la proposition (5.2.1) entraîne $\{e_1, ..., e_m\}$ libre, or $m > n$ entraîne $\{e_1, ..., e_m\}$ lié (car $n = dim\mathbf{E}$), d'où contradiction.

2) On doit montrer que tout $x \in \mathbf{E}_{\lambda_1} + ... + \mathbf{E}_{\lambda_m}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = x_1 + ... + x_m$ où les $x_i \in \mathbf{E}_{\lambda_i}$.

En effet, supposons que $x = x_1 + ... + x_m = x'_1 + ... + x'_m$ avec $x_i, x'_i \in \mathbf{E}_{\lambda_i}$, alors $(x_1 - x'_1) + ... + (x_m - x'_m) = 0$ où les $(x_i - x'_i) \in \mathbf{E}_{\lambda_i}$. On a d'après la proposition (5.2.1) $x_i = x'_i$ pour $i = 1, ..., m$ car sinon les $\left\{x_{i_1} - x'_{i_1}, ..., x_{i_l} - x'_{i_l}\right\}$ forment un système lié.

5.3 Propriétés du polynôme caractéristique

Théorème 5.3.1. *: Le polynôme caractéristique $p_A(\lambda)$ de la matrice A est invariant lorsque l'on remplace A par une matrice semblable (c.à.d $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ pour $B = P^{-1}AP$ et P inversible).*

Preuve : En effet $B = P^{-1}AP$ entraîne $B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I = P^{-1}(A - \lambda I)P$, d'où $p_B(\lambda) = det(B - \lambda I) = detP^{-1}det(A - \lambda I)detP = detP^{-1}detPdet(A - \lambda I) = det(P^{-1}P)det(A - \lambda I) = det(A - \lambda I) = p_A(\lambda)$.

Remarque 5.3.1. *: 1) Si f est un endomorphisme de $\boldsymbol{E}$ et $M(f)$ la matrice associée à f, lorsque $\boldsymbol{E}$ est muni d'une base, on peut définir le polynôme caractéristique de f par $p_f(\lambda) = p_{M(f)}(\lambda)$ et ce dernier ne dépend pas de la base choisie puisque deux matrices associées à un endomorphisme sont semblables.*

2) Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Théorème 5.3.2. *: Soit f un endomorphisme de $\boldsymbol{E}$ et $p_f(x)$ son polynôme caractéristique admettant dans $\boldsymbol{K}$ une racine multiple λ d'ordre k, alors $1 \leq dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}_\lambda \leq k$.*

Preuve : Supposons $dim_{\mathbf{K}}\mathbf{E}_\lambda = r$. Alors $\mathbf{E}_\lambda$ contient r vecteurs propres linéairement indépendants $v_1, ..., v_r$, nous pouvons compléter $\{v_i\}$ de manière à obtenir une base de $\mathbf{E}$
$\{v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s\}$.

Nous avons

$$\begin{array}{rcl}
f(v_1) & = & \lambda v_1 \\
f(v_2) & = & \lambda v_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
f(v_r) & = & \lambda v_r \\
f(w_1) & = & a_{11}v_1 + ... + a_{1r}v_r + b_{11}w_1 + ... + b_{1s}w_s \\
f(w_2) & = & a_{21}v_1 + ... + a_{2r}v_r + b_{21}w_1 + ... + b_{2s}w_s \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
f(w_s) & = & a_{s1}v_1 + ... + a_{sr}v_r + b_{s1}w_1 + ... + b_{ss}w_s
\end{array}$$

La matrice de f dans la base ci-dessus est

$$M(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{s1} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & a_{12} & a_{22} & \dots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & a_{1r} & a_{2r} & \dots & a_{sr} \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{21} & \dots & b_{s1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{12} & b_{22} & \dots & b_{s2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1s} & b_{2s} & \dots & b_{ss} \end{pmatrix}$$

$p_f(x) = det(M(f) - xI) = (\lambda - x)^r det(B - xI_s)$ où B est la matrice (b_{ij}) et I_s la matrice unité d'ordre s. Comme par hypothèse $p_f(x) = (\lambda - x)^k g(x)$ où $g(\lambda) \neq 0$, il s'ensuit que $r \leq k$.

5.4 Diagonalisation

Définition 5.4.1. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est appelée matrice diagonale si elle est de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

c'est à dire si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

On sait que les matrices diagonales sont simples du point de vue calculatoire et théorique. Par exemple, la solution de $Ax = c$, où A est une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ est généralement lassante lorsque n est grand, mais elle est triviale si A est diagonale. De même élever une matrice à une puissance très large (par exemple A^{100}) est en général encombrant par calcul direct, mais devient trivial si A est diagonale. Ainsi la diagonalisation d'une matrice, c.à.d sa réduction à une forme diagonale, s'avérera très intéressante.

Définition 5.4.2. *On dit qu'une matrice carrée est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale, disons*

$$P^{-1}AP = D.$$

Lorsque c'est le cas, on dit que P diagonalise A.

Théorème 5.4.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, alors*

1) A est diagonalisable ssi A possède n vecteurs propres linéairement indépendants.

2) Si A possède n vecteurs propres linéairement indépendants $p_1, \cdots, p_n$ et $P = (p_1, \cdots, p_n)$, alors $P^{-1}AP = D$ est diagonale, où le $j^{\text{ème}}$ élément diagonal de D est égal à la $j^{\text{ème}}$ valeur propre de A.

$\Rightarrow$) Si A est diagonalisable, il existe une matrice inversible

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

telle que

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

Multiplions (5.5) par P, on obtient

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1p_{11} & \cdots & d_np_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ d_1p_{n1} & \cdots & d_np_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

$AP = (d_1p_1, \cdots, d_np_n)$ où p_j désigne la $j^{\text{ème}}$colonne de P, de même

$$AP = A(p_1, \cdots, p_n) = (Ap_1, \cdots, Ap_n) \tag{5.7}$$

En comparant (5.6) et (5.7), nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} Ap_1 & = & d_1p_1 \\ \vdots & & \vdots \\ Ap_n & = & d_np_n \end{array} \tag{5.8}$$

$p_1, \cdots, p_n$ sont non nuls, sinon P ne serait pas inversible. (5.8) prouve que les p_i sont des vecteurs propres non nuls, et les d_i sont des valeurs propres. Le rang de P doit être n, car P est inversible ; donc les colonnes de P doivent être linéairement indépendantes. Nous avons démontré aussi 2).

$\Leftarrow$) Si A possède n vecteurs propres linéairement indépendants, disons $p_1, \cdots, p_n$, soit $d_1, \cdots, d_n$ les valeurs propres respectives. Alors

$$\begin{aligned} AP &= (Ap_1, \cdots, Ap_n) = (d_1p_1, \cdots, d_np_n) \\ &= \begin{bmatrix} d_1p_{11} & \cdots & d_np_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ d_1p_{n1} & \cdots & d_np_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} = PD \end{aligned} \tag{5.9}$$

P est inversible car ses colonnes sont linéairement indépendantes, en multipliant (5.9) par P^{-1}, on obtient $P^{-1}AP = D$. A est alors diagonalisable.

Remarque 5.4.1. *Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ a n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable (Il suffit de combiner la proposition du paragraphe 1.2 et le théorème 1.6).*

Définition 5.4.3. *Soit $p(x)$ un polynôme à coefficients dans K, de degré n, on dit qu'il est scindé s'il s'écrit sous la forme d'un produit de n polynômes du premier degré à coefficients dans K, c'est à dire $p(x) = a(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$ où $a, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K$.*

Théorème 5.4.2. *(Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, A est diagonalisable ssi :*

1) p_A est scindé dans K;

2) Pour chaque racine λ_i de p_A, d'ordre k_i, $\dim E_{\lambda_i} = k_i$.

$\Rightarrow$)

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$p_A(x) = p_D(x) = (\lambda_1 - x)\cdots(\lambda_n - x)$, les racines de $p_A(x)$ sont les $\lambda_i \in K$ donc 1) est vérifiée. En faisant intervenir l'ordre de multiplicité des λ_i, on peut écrire

$p_A(x) = (\lambda_1 - x)^{k_1}\cdots(\lambda_m - x)^{k_m}$. On a $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$. Comme A est

diagonalisable, $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}$, d'où $dim_K E = n = \sum_{i=1}^{m} dim\, E_{\lambda_i}$.

Si l'une des $dim_K E_{\lambda_i} < k_i$, on aurait $\sum_{i=1}^{m} dim\, E_{\lambda_i} < n$.

$\Leftarrow$) On a $n = k_1 + \cdots + k_m$.

2) entraîne $dim(E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}) = \sum_{i=1}^{m} dim\, E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} k_i = n = dim\, E$.

La réunion des bases des E_{λ_i} est une base de E formée de vecteurs propres, d'où A est diagonalisable.

Corollaire 5.4.1. *Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.*

1) du théorème 1.7 est vérifiée. En outre $1 \leq dim\, E_{\lambda_i} \leq 1$, donc 2) est satisfaite et A est diagonalisable.

Exemple 5.4.1. *1) Etudier la diagonalisation de la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Solution :

Le polynôme caractéristique de A est :

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} 3-x & -2 & 0 \\ -2 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 5-x \end{vmatrix} = (5-x)\begin{vmatrix} 3-x & -2 \\ -2 & 3-x \end{vmatrix} \\ &= (5-x)[(3-x)^2 - 4] = (5-x)^2(1-x) \end{aligned}$$

les valeurs propres sont 1 et 5. Les espaces propres sont E_1 et E_5.

E_λ : $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ *est un vecteur propre de A correspondant à λ ssi x n'est pas une solution triviale de $(A - \lambda I)x = 0$ c'est à dire*

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{5.10}$$

Si $\lambda = 5$, alors

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où $-2x_1 - 2x_2 = 0$, c'est à dire $x_2 = -x_1$ donc

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c'est à dire E_5 est engendré par $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Si $\lambda = 1$ (5.10) devient

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On résout le système pour trouver $x_1 = x_2$ et $x_3 = 0$, alors

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donc E_1 est engendré par $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. *On en déduit que A est diagonalisable,*

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2) Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$p_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2$; $\lambda = -1$ *est la seule valeur propre de A;*

E_{-1} :

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On résout le système pour en déduire que $x_1 = x_2$, *c'est à dire* E_{-1} *est engendré par* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Comme* $dim_{\mathbb{R}} E_{-1} = 1 < 2$, A *n'est pas diagonalisable.*

3) Soit f *l'opérateur linéaire défini par*

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 5x_3 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ *par rapport à laquelle la matrice de* f *soit diagonale.*

Solution : *Si* $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^3$, *alors*

$$f(e_1) = f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},\ f(e_2) = f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f(e_3) = f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

On en déduit que $M(f) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *par rapport à la base* B. *Nous voulons trouver une nouvelle base* $B' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ *de telle sorte que la matrice* A' *de* f *relative à* B' *soit diagonale. Si nous désignons par* P *la matrice de passage de la base canonique* B *à la base inconnue* B', *on a* $A' = P^{-1}AP$; *c'est à dire* P *diagonalise* $M(f)$. *D'après l'exemple 1), nous obtenons*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad et \quad A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les colonnes de P sont

$$\begin{aligned} u_1^{'} &= e_1 - e_2 \\ u_2^{'} &= e_3 \\ u_3^{'} &= e_1 + e_2 \end{aligned}$$

qui produisent la matrice diagonale $A^{'}$ *de* f.